

BEU
BAKU ENGINEERING UNIVERSITY

ISSN 2521-6368

Volume 1
Number 2

2017

Journal of Baku Engineering University

P H Y S I C S

Journal is published twice a year
Number - 1. June, Number - 2. December

An International Journal

<http://journal.beu.edu.az>

ISSN 2521-6368



Journal of Baku Engineering University

PHYSICS

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

PHYSICS

2017. Volume 1, Number 2

CONTENTS

Frequency And Amplitude Of Instable Oscillations In Semiconductors With Two Types Of Charge Carriers In A Constant Electric Field <i>E. R. Hasanov, R.A. Hasanova, K.N. Yusifova</i>	127
Basic Parameters and Characteristics of Anisotype p-GaSe<Ho>/n-InSe<Ho> heterostructures <i>A.Sh. Abdinov, R.F. Babaeva</i>	134
Analytical solutions of the Schrödinger Equation with the Generalized Woods-Saxon Potential for Arbitrary l - state <i>V.H. Badalov</i>	141
Determination of Sizes of Macromolecules of Polyethylene Glycol in Water Solutions by Viscosimetry Method <i>E.A. Masimov, H.Sh. Hasanov, B.G. Pashayev</i>	157
Current-Voltage Characteristics of Alloy Systems $TlInC_2^{VI} - TlInC_2^{VI}$ <i>E.M. Gojaev, S.Kh. Agaeva</i>	163
Two-Photon Transitions in Semiconductor Quantum Well <i>I.R. Gadirova</i>	172
Optical Properties of Solid Solutions of $TlInS_2-TlInSe_2$ System in Fundamental Absorption Region <i>R.M. Sardarly, N.A. Aliyeva, F.T. Salmanov, A.J. Mikayilova, M.Y. Yusifov</i>	177
Distribution of Parameters of Long-Period Comets in Phase of the 11-year Solar Activity Cycle: <i>A. S. Quliyev, H.A. Qasimov, T. Fərhadova</i>	181
Investigation of $K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ Crystal Using X-Ray and Optical Microscopic Methods <i>R.B. Bairamov, V.I. Nasirov, E.V. Nasirov</i>	186
The Investigation of Water Solutions of Polyethylene Glycol-6000 by Methods of the Viscosimetry and the Spectrophotometry <i>E.A. Masimov, S.Y. Ojagverdieva, Y.Kh. Shakhverdiyev, T.O. Bagirov</i>	193
Analytical Solutions of the Schrödinger Equation for the Hulthén Plus Ring-Shaped like Potential <i>H.I. Ahmadov, M.V. Qocayeva, T.H. Aliyeva, E.A. Dadashov</i>	199

UOT: 534PACS: 71.23.-k

FREQUENCY AND AMPLITUDE OF INSTABLE OSCILLATIONS IN SEMICONDUCTORS WITH TWO TYPES OF CHARGE CARRIERS IN A CONSTANT ELECTRIC FIELD

E. R. HASANOV^{1,2}, R.A. HASANOVA², K.N. YUSIFOVA²

Baku State University¹

Institute of Physics of ANAS²

Baku / AZERBAIJAN

aygul_islamzade@mail.ru

ABSTRACT

In semiconductors with two types of charge carriers in a constant electric field, a new instability is found with respect to the relaxation of charge carriers. The frequency and increment of growth in semiconductors are theoretically calculated under equal values of electrons and holes. For the first time, Van der Paul equation describing an alternating electric field inside semiconductor was obtained. From the solution of the nonlinear Van der Paul equation, analytical expressions are obtained for the amplitude and frequency of oscillations inside the semiconductor. It is found that the dependence of amplitude on time is complicated and can grow exponentially for a certain interval of variation of the external electric field. The oscillation frequency increases when approximation is nonlinear. The obtained analytical formulas were evaluated through existing experiments and satisfactory agreement was achieved.

Keywords: frequency, amplitude, electron, non-equilibrium oscillations.

SABIT ELEKTRİK SAHƏSİNDƏ İKİ TIP KEÇİRİCİLİYƏ MALİK YARIMKEÇİRİCİLƏRDƏ YARANAN RƏQSLƏRİN TEZLİYİ VƏ AMPLİTUDU

XÜLASƏ

Sabit elektrik sahəsində iki tip keçiriciliyə malik yarımkeçiricilərdə yükdaşıyıcıların relaksasiyası nəticəsində yeni dayanıqsızlıq halı müəyyən edilmişdir. Elektronların və deşiklərin sayları bərabər olan halda yaranan rəqslərin tezlikləri və inkrementləri nəzəri olaraq hesablanmışdır. Yarımkeçirici daxilində dəyişən elektrik sahəsini ödəyən Van-der-Pol tənliyi ilk olaraq müəyyən olunmuşdur. Qeyri-xətli Van-der-Pol tənliyinin həllindən rəqsin amplitudu və tezliyi üçün analitik ifadələr alınmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, rəqsin amplitudu zamandan mürəkkəb asılıdır və elektrik sahəsinin müəyyən dəyişmə intervalında eksponensial dəyişə bilər. Qeyri xəfli yaxınlaşmada rəqsin tezliyi yalnız artır. Nəzəri ifadələr təcrübi məlumatlarla qiymətləndirilib və kifayətləndirici olduğu isbat olunub.

Açar sözlər: tezlik, amplituda, elektron, tarazlıqda olmayan rəqslər.

ЧАСТОТА И АМПЛИТУДА НЕУСТОЙЧИВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ С ДВУМЯ ТИПАМИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

РЕЗЮМЕ

В полупроводниках с двумя типами носителей заряда в постоянном электрическом поле найдена новая неустойчивость с учётом релаксации носителей заряда. Теоретически вычислены частота и инкремент нарастания в полупроводниках при равном значении электронов и дырок. Впервые получено уравнение Ван-дер-Поля описывающее переменное электрическое поле внутри полупроводника. Из решения нелинейного уравнения Ван-дер-Поля получены аналитические выражения для амплитуды и частоты колебания внутри полупроводника. Найдено, что амплитуда зависит от времени сложным образом и может расти экспоненциально при определённом интервале изменения внешнего электрического поля. Частота колебания увеличивается при нелинейном приближении. Полученные аналитические формулы оценены существующими экспериментами и получены удовлетворительные согласия.

Ключевые слова: частота, амплитуда, электрон, неравновесные колебания

In many theoretical and experimental works of recent years it was shown [1-4] that heating of the electron-hole gas, which occurs in particular, depending on the mobility of the charge

carriers and on the electric field voltage, under certain conditions can lead to the appearance of negative differential conductivity. Noticeable decrease in mobility with heating of electrons and holes by electric field takes place in GaAs compound due to the transition of a part of electrons (and holes) to additional minimum [2] (for example, the Gunn effect). In these cases, a negative differential resistance occurs in a spatially homogeneous system. This causes a problem of the stability or instability of such system. Oscillations of the electric field and charge arise in the system under instable state. When these oscillations intensify, the system emits energy with a certain frequency. When electrons and holes participate in the conductivity of semiconductor so that

$$\sigma(E) = \sigma_-(E) + \sigma_+(E) \quad (1)$$

then under the conditions of dependence of σ_- and σ_+ on the strength of the external electric field, electrical instability can arise in semiconductor. If such a crystal is included in the direct connect circuit, any fluctuation of one of the conductivity components will change the value of σ , and, consequently, the electric field voltage and the second conductivity component in the sample.

In this theoretical work, we investigate instable state of semiconductor with two types of charge carriers, when the time dependences of σ_- и σ_+ conditioned by the change of electric field in the sample, are of relaxational character [5]. With such a task, we determine the values of frequency under internal instability of the sample.

From the Van der Paul equation obtained for alternating electric field, we determine the change in the frequency and amplitude of the oscillation inside a semiconductor with two types of charge carriers and calculate the amplitudes of the energy release under the conditions of instability of the abovementioned semiconductor. An experiment will follow to evaluate the analytical formulas obtained for the frequency and amplitude of the oscillation under instability conditions, an experiment will follow [5].

Basic equations

In the instable state of the semiconductor, both the carrier concentration and the electric field in the sample are not distributed homogeneously. Inside the sample, the concentrations of electrons n_- , holes n_+ and electric field E are represented as follows:

$$n_- = n_-^0 + n_-'; n_+ = n_+^0 + n_+'; E = E_0 + E' \quad (2)$$

where n_-^0, n_+^0, E_0 are equilibrium values, n_-', n_+', E' variable values of the corresponding magnitudes.

Electronic and hole conductivities are presented in the form:

$$\sigma_- = \sigma_- + \sigma_-', \sigma_+ = \sigma_+ + \sigma_+' \quad (3)$$

and under relaxation conditions the variable parts are determined by the following equations

$$\frac{d\sigma_-'}{dt} + \frac{\sigma_-'}{\tau_-} = \frac{\sigma_- \beta_- E'}{\tau_- E_0} \quad (4)$$

$$\frac{d\sigma_+'}{dt} + \frac{\sigma_+'}{\tau_+} = \frac{\sigma_+ \beta_+ E'}{\tau_+ E_0} \quad (5)$$

$$\beta_- = 2 \frac{d \ln \sigma_-'}{d \ln (E_0^2)}; \beta_+ = 2 \frac{d \ln \sigma_+'}{d \ln (E_0^2)} \quad (6)$$

where β_- и β_+ are constant values τ_- -the time of electron relaxation and τ_+ - the time of hole relaxation. The concentration of electrons and holes is determined from the corresponding equations of continuity:

$$\frac{\partial n_-}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (n_- \mu_- E + D_- \nabla n_-) \quad (6); \quad \frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_+ \mu_+ E + D_+ \nabla n_+) \quad (7)$$

where μ_- - electron mobility, D_- - diffusion coefficient of electrons, μ_+ - hole mobility, D_+ - diffusion coefficient of holes. The alternating electric field E' and charge carrier concentrations are connected with each other by the Poisson equation:

$$\text{div} E' = \frac{4\pi e}{\varepsilon} (n'_+ + n'_-) \quad (8)$$

where e - elementary positive electric charge and ε - dielectric permeability of the medium.

For the task set, we must solve the system of equations (4-5-6-7-8) together. When the oscillations of the corresponding quantities occur only inside the crystal (internal instability) and do not go outside, the oscillation frequency is a substantial value, and the wave vector is a real value, which is defined as follows:

$$\omega = \omega_0 + i\omega_1, \quad K = \frac{2\pi}{L} m$$

(L - sample size $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$ integral)

Deviations from the equilibrium values E', n', n_+ can have any values with respect to the equilibrium values of E_0, n^0, n^0_+ .

We must bring the system of equations (4-8) to one equation, with respect to the alternating electric field E' .

Theory

Defining n'_+ from the Poisson equation $n'_+ = \frac{\varepsilon}{4\pi e} \text{div} E' + n'_-$ we obtain the following equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial n'_-}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sigma_-^0}{e} E' + \frac{\sigma'_-}{e} (E_0 + E') + D_- \frac{\partial n'_-}{\partial x} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{4\pi e} \text{div} E' + n'_- \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sigma_+^0}{e} E' + \frac{\sigma'_+}{e} (E_0 + E') - D_- \text{grad.} \left(\frac{\varepsilon}{4\pi e} \text{div} E' + n'_- \right) \right] &= 0 \\ \left(\tau_- \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) \sigma'_- = \sigma_-^0 \beta_- \frac{E'}{E_0}; \quad \left(\tau_+ \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) \sigma'_+ = \sigma_+^0 \beta_+ \frac{E'}{E_0} \end{aligned} \quad (9)$$

In the experiment [6] it was proven that

$$\beta_- = -|\beta_-| \quad (10)$$

After simple algebraic calculations, taking into account (10) from (9), we obtain:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\frac{\sigma_-^0}{e} \frac{\partial E'}{\partial x} + \frac{E_0 + E'}{e} \nu \frac{\sigma'_-}{\sigma x} + \frac{\partial E'}{\partial x} \frac{\sigma'_-}{e} \right] &= \\ = - \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_- \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\frac{\sigma_+^0}{e} \frac{\partial E'}{\partial x} + \frac{E_0 + E'}{e} \frac{\partial \sigma'_+}{\partial x} + \frac{\sigma'_+}{e} \frac{\partial E'}{\partial x} - \frac{\varepsilon D_+ \partial^2 E'}{4\pi e \partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Substituting σ'_+ and σ'_- from (9) in (11) we obtain:

$$\begin{aligned} \left[\tau_+ \tau_- \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\tau_+ + \tau_-) \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right] \left[\sigma_0 U E' - (\sigma_-^0 D_+ + \sigma_+^0 D_-) \frac{\partial E'}{\partial x} + \frac{\varepsilon D_- D_+ \partial^3 E'}{4\pi} \right] &+ \\ + \left[\sigma_+^0 \beta_+ \left(\tau_+ \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) - \sigma_-^0 \beta_- \left(\tau_- \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) \right] \left[U E' + \frac{3U}{E_0} (E')^2 \right] &+ \\ + \left[D_+ \beta_- \tau_-^0 \left(\tau_+ \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) - D_- \beta_+ \tau_+^0 \left(\tau_- \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) \right] \left[\left(1 + \frac{2E'}{E_0} \right) \frac{\partial E'}{\partial x} + \frac{E'}{E_0} \frac{\partial E'}{\partial x} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

When obtaining (12), it was taken into account that $D_+k^2 \ll \sigma_0$

Moreover $\frac{\partial E'}{\partial t} = \frac{\partial E'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial E'}{\partial t} U$; $U = \frac{\partial x}{\partial t}$ - the velocity of distribution of the emerging waves inside the crystal. We denote the small parameter

$$\gamma = \frac{D_+k^2}{\sigma_0} \ll 1, \quad \frac{1}{\tau_+\tau_-} \left(\frac{1+\sigma_+\beta_+-\sigma_0\beta_-}{\sigma_0} \right) = \omega_0^2$$

$$U=U_0+U'$$

and then from (12) obtain the following equation:

$$\frac{\partial^2 E'}{\partial t^2} + \omega_0^2 E' = \gamma(F_1 + F_2) \quad (13)$$

$$F_1 = \frac{\sigma_- + en_+\mu_-}{U_0k^2} \frac{\partial^3 E'}{\partial x \partial t^2} - \frac{\varepsilon D_-}{U_0k^2} \frac{\sigma_0(\tau_- + \tau_+)}{\partial_+k^2\tau_-\tau_+} \frac{\partial E'}{\partial t} + \frac{(\tau_- + \tau_+)(\sigma_- + en_+\mu_-)}{U_0k^2\tau_-\tau_+} \frac{\partial^2 E'}{\partial t \partial x} - \frac{(\tau_- + \tau_+) \varepsilon \partial_-}{\tau_-\tau_+U_0k^2} \frac{\partial^4 E'}{4\pi \partial t \partial x^3} + \frac{\sigma_- + en_+\mu_-}{U_0k^2\tau_-\tau_+} \frac{\partial E'}{\partial x} -$$

$$- \frac{\varepsilon D_-}{4\pi\tau_-\tau_+U_0k^2} \frac{\partial^3 E'}{\partial x^3} - \frac{(\sigma_+\beta_+\tau_+-\sigma_-\beta_-\tau_-)}{\tau_-\tau_+k^2D_+} \frac{\partial E'}{\partial t} - \frac{(\beta_+\sigma_--\beta_--en_+\mu_-)\sigma_0}{D_+k^2} \frac{\partial E'}{\partial x} - \frac{\sigma_0^0\beta_-\tau_--en_+\mu_-\beta_+\tau_-}{\tau_-\tau_+U_0k^2} \frac{\partial^2 E'}{\partial t \partial x} \quad (14)$$

$$F_2 = - \frac{\sigma}{U_0k^2D_+} \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} E' + U' \frac{\partial^2 E'}{\partial t^2} \right) - \frac{\tau_- + \tau_+}{\tau_-\tau_+U_0} \cdot \frac{\sigma_0}{k^2D_+} E' \frac{\partial U'}{\partial t} -$$

$$- \frac{\tau_- + \tau_+}{\tau_-\tau_+} \frac{U'}{U_0} \frac{\sigma_0}{k^2D_+} \frac{\partial E'}{\partial t} - \frac{U' E'}{\tau_-\tau_+U_0} \frac{\sigma_0}{k^2D_+} - \frac{\sigma_+\beta_+ - \sigma_-\beta_-}{U_0\tau_-\tau_+k^2D_+} U' E' - \frac{\sigma_+\beta_+ - \sigma_-\beta_-}{\tau_-\tau_+k^2D_+} \cdot$$

$$\cdot 3 \frac{(E')^2}{E_0} - \frac{\sigma_+\beta_+ - \sigma_-\beta_-}{\tau_-\tau_+U_0k^2D_+} \cdot 3 \cdot \frac{U'(E')^2}{E_0} - \frac{\sigma_+\beta_+\tau_+ - \sigma_-\beta_-\tau_-}{\tau_-\tau_+U_0k^2D_+} \left(U' \frac{\partial E'}{\partial t} + E' \frac{\partial U'}{\partial t} \right) -$$

$$- 6 \frac{\sigma_+\beta_+\tau_+ - \sigma_-\beta_-\tau_-}{\tau_-\tau_+k^2D_+} \frac{E' \partial E'}{E_0 \partial t} - 6 \frac{\sigma_+\beta_+\tau_+ - \sigma_-\beta_-\tau_-}{\tau_-\tau_+U_0k^2D_+} \frac{U' E' \partial E'}{E_0 \partial t} -$$

$$- 3 \frac{\sigma_+\beta_+\tau_+-\sigma_-\beta_-\tau_-}{\tau_-\tau_+U_0k^2D_+} \frac{(E')^2 \partial U'}{E_0 \partial t} - 3 \frac{\sigma_-\beta_+-en_+\mu_-\beta_-}{k^2D_+} \sigma_0 \frac{E' \partial E'}{E_0 \partial t} - 3 \frac{\sigma_-\beta_+-en_+\mu_-\beta_+\tau_-}{U_0\tau_-\tau_+k^2} \frac{E' \partial^2 E'}{E_0 \partial t \partial x} \quad (15)$$

To analyze the internal instability (ie, the linear theory of current oscillation), a linear approximation is sufficient in Eq. (13), i. e. the nonlinear terms in (13) are equal to zero. Then

$$\frac{\partial^2 E'}{\partial t^2} + \omega_0^2 E' = \gamma F_1 \quad (16)$$

Introducing $E' \sim e^{i(\omega t - kx)}$ from (16) we easily obtain

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \gamma F_1 \quad (17)$$

Substituting F1 from (14) into (17) in $\beta_- < 1 + \frac{n_+\mu_+}{n_-\mu_-} \beta_+$ we obtain the following expressions for the oscillation frequency ω and the growth rate of the oscillation inside the crystal

$$\omega = \frac{\Omega - \varphi \Omega_1}{1 + \varphi^2}; \quad \omega_1 = \frac{\Omega \varphi - \Omega_1}{1 + \varphi^2} \quad (18)$$

$$\text{where } \Omega = - \frac{2\pi \mu_+}{\varepsilon \mu_-} \frac{\sigma_-}{\sigma_0 \tau_-} \left(1 + \frac{\tau_+}{\tau_-} \right) - \frac{2\pi \mu_+}{\varepsilon \mu_-} \left(\frac{en_+\mu_-}{\sigma_0 \tau_-} + \frac{\varepsilon k^2 D_+}{4\pi \sigma_0 \tau_+} \right) + \frac{\varepsilon k^2 D_+}{4\pi \sigma_0 \tau_+} + \frac{\sigma_-\beta_-}{\sigma_0 \tau_-} - \frac{en_+\mu_-\beta_+}{\sigma_0 \tau_+} \quad (19)$$

$$\Omega_1 = en_+\mu_- \left[\beta_- \left(1 + \frac{n_+}{n_-} \cdot \frac{1}{\sigma_0 \tau_+} \right) - \beta_+ \frac{n_+}{n_-} \left(1 + \frac{\sigma_+}{\sigma_-} \cdot \frac{1}{\sigma_0 \tau_-} \right) \right] \quad (20)$$

$$\varphi = \frac{D_+k}{U_0} \cdot \frac{\sigma_- + en_+\mu_-}{\sigma_0} \quad (21)$$

From (18-21) is easily seen that when $U_0 = D_+k \frac{\sigma_- + en_+\mu_-}{\sigma_0}$

i.e. $\varphi=1$

$$\omega = \frac{\Omega - \Omega_1}{2}; \quad \omega_1 = - \frac{\Omega + \Omega_1}{2}$$

$$\Omega = -\frac{2\pi}{\varepsilon} \frac{\sigma_+}{\sigma_0 \tau_-}; \quad \Omega_1 = en_+ \mu_- \beta_- \left(1 + \frac{n_-}{n_+} \cdot \frac{1}{\sigma_0 \tau_+}\right)$$

and $\omega = -\frac{|\Omega| + \Omega_1}{2}; \quad \omega_1 = \frac{|\Omega| - \Omega_1}{2}$

If $en_+ \mu_- \beta_- \left(1 + \frac{n_-}{n_+} \cdot \frac{1}{\sigma_0 \tau_+}\right) > \frac{2\pi}{\varepsilon} \frac{\sigma_+}{\sigma_0 \tau_-}$ (22)

The oscillations inside the crystal are growing with frequency ω . The inequality (22) is completely satisfied under the experimental data [5].

In the experiment [6] $\tau_+ = 4,2 \cdot 10^{-7} \text{sek}$, $\tau_- = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{sec}$

$$n_+ \approx n_- \approx 10^{11} \text{sm}^{-3}; \quad \mu_+ \sim 10^4 \text{sm}^2/\text{b} \cdot \text{sek}; \quad \mu_- \sim 10^5 \text{sm}^2/\text{b} \cdot \text{sec}$$
 (23)

Substituting the data (23) in (22) it is easy to verify the validity of inequality (22).

Nonlinear theory of current oscillation

All the variable quantities (n^+ , n^- , E') inside the crystal due to the relaxation of the charge carriers change as a function of the coordinates and time as follows:

$$(n^+, n^-, E') \sim e^{i(\omega t - kx)} \sim \cos(\omega t + \theta)$$
 (24)

θ – initial phase of wave.

For simplicity, we will speak of one variable E' . The remaining variables (ie n^+ , n^-) are connected with alternating electric field through the Poisson equation (8). Then we can write

$$E' = E_1 \cos(\omega t + \theta)$$
 (25)

In linear approximation, i.e. $E' \ll E_0$ in (25) E_1 amplitude is a constant value and does not depend on the coordinates and time. In nonlinear approximation, the E_1 approximation depends on the time, and therefore, when solving the equation (13), we should not discard the nonlinear term F_2 from the Van der Paul equation. Solving the Van der Paul equation (13) we determine the amplitude of the electric field E_1 inside the crystal as a function of the coordinates and time, and defining $E_1(x, t)$, we can determine n^+ and n^- through Poisson's equation and then the current oscillation

$$J' = J'_+ + J'_-$$
 (26)

where J'_+ – hole current and J'_- – electron current. Hence the whole problem leads to the definition of E_1 from the Van der Paul equation (13).

The Van der Paul equation with a small parameter γ sufficiently describes the oscillations inside the abovementioned semiconductor. For $\gamma = 0$, the oscillations are exclusively harmonic and $E' = E_1(0) \cos(\omega t + \theta)$. In the nonlinear approximation, $\gamma \neq 0$ and the amplitude $E_1 = E_1(t)$. The mathematical method for solving the Van der Paul equation is described in detail in the book of N.N. Bogolyubov and Yu.A. Metropolskiy (*Asymptotic methods in the theory of non linear oscillations*) [6]. We will apply this mathematical method to the equation (13).

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \Phi(E', \frac{dE'}{dt}) \sin\psi \, d\psi$$
 (27)

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 - \frac{\gamma}{2\pi\omega_0 E_1} \int_0^{2\pi} \Phi(E', \frac{dE'}{dt}) \cos\psi \, d\psi$$
 (28)

Substituting the function Φ in (27) and after integration we obtain:

$$E_1(t) = \frac{E_1(0)\varphi_1 e^{\frac{\gamma\varphi_1 t}{4\pi}}}{\varphi_1 + E_0(0)\varphi_2 e^{\frac{\gamma\varphi_1 t}{4\pi}}} \quad (29)$$

We denote $\alpha = \frac{\gamma\varphi_1}{4\pi}t = \frac{t}{t_{\text{char.}}}$; $t_{\text{char.}} = \frac{4\pi\varphi_1}{\gamma}$ then from (29) we obtain $a = \frac{E_1(0)\varphi_2}{\varphi_1}$

$$\frac{E_1(t)}{E_1(0)} = \frac{e^\alpha}{1+a(1-e^\alpha)} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\sigma_- \beta_- \tau_-}{k^2 D_+ \tau_- \tau_+} + \frac{\varepsilon \Delta_- k}{4\pi U_0 \tau_- \tau_+ \omega_0} - \frac{\sigma_- (\tau_- + \tau_+)}{D_+ k^2 \tau_- \tau_+}, \\ \varphi_2 &= \frac{9U_1(\sigma_- \beta_- \tau_- - \sigma_+ \beta_+ \tau_+)}{\tau_- \tau_+ U_0 k^2 D_+ E_0} \end{aligned} \quad (31)$$

It can be seen from (30) that when $t=0$, $E' = E_1(0)$ the oscillation of the electric field begins with a constant amplitude $E_1(0)$. The size of the crystal is an important factor for the analysis of the further behavior of the amplitude $E_1(0)$. From (31) we easily obtain that for $\beta_+ = \frac{\mu_-}{\mu_+} \beta_-$ and crystal size

$$L = \left(\frac{\varepsilon \pi T}{n}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{\tau_-}{\tau_+}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{\tau_-}{\tau_+}}\right)^{1/2} \quad (32)$$

$$\varphi_1 = \frac{\sigma_-^0 \beta_-}{k^2 D_+ \tau_+}; \varphi_2 = -\frac{9U_1 \sigma_- \beta_- (\tau_+ - \tau_-)}{\tau_- \tau_+ U_0 k^2 D_+ E_0} = -\frac{E_{xar}}{E_0} \quad (33)$$

Taking into account (33) from (30) we readily obtain

$$\frac{E_1(t)}{E_1(0)} = \frac{e^{\frac{t}{\tau_x}}}{1 + \frac{E_x}{E_0} e^{\frac{t}{\tau_x}}} \quad (34)$$

When $t=0$, $\frac{E_1(t)}{E_1(0)} = \frac{E_0}{E_x}$ and the initial amplitude of the electric field oscillation under

$$E_1(t) = E_0; E_1(0) = E_x = \frac{9U_1 \sigma_- \beta_- (\tau_+ - \tau_-)}{\tau_- \tau_+ U_0 k^2 D_+ E_0}$$

For $t \rightarrow \infty$ $\frac{E_1(t)}{E_1(0)} = \frac{E_0}{E_x}$ the oscillating electric field tends to the initial value and of course the oscillation is stationary. However, a significant change in the amplitude of the electric field oscillation occurs under the following inequalities:

1. $\frac{E_x}{E_0} e > 1$, but this equality can be fulfilled for a very small value of the external constant electric field E_0 . The charge carriers (electrons and holes) do not warm up when the field is very weak and there will be no oscillation.
2. $\frac{E_x}{E_0} e < 1$ can be fulfilled and in this case

$$E_1(t) = E_1(0) e^{\frac{t}{\tau_x}} \quad (35)$$

oscillations occur exponentially

3. If $t = t_x$, then $\frac{E_1(t)}{E_1(0)} = \frac{e}{1 + \frac{E_x}{E_0} e}$ the values of the electric field oscillation E' depend on the numerical values E_0 и E_x .

When $\frac{E_x}{E_0} e < 1$ i.t. $E_0 > e E_x$

$\frac{E'}{E_1(0)} = e$ and the oscillating part of the electric field is greater than the initial amplitude value.

$\frac{E_x}{E_0} e > 1$ corresponds to a very low value of the external electric field and this is physically impossible.

Thus, the oscillations of the electric field in the above semiconductor change over time in a very complicated manner. At $t = 0$, the oscillation amplitude $E_1(0)$ is a constant value, at $t=t_x$ $E_1(t) > E_1(0)$, at $t \rightarrow \infty$ $E_1(t) = E_1(0)$ stationary.

Frequency of oscillation

The frequency of oscillation is determined from the Van der Paul equation (13) as follows:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega = \omega_0 - \frac{\gamma}{2\pi\omega_0 E_1} \int_0^{2\pi} \Phi(E', \frac{dE'}{dt}) \cos\psi d\psi \quad (36)$$

After a simple integration from (36), we obtain:

$$\omega = \omega_0 - \frac{\gamma\omega_0}{4\pi} \left(\frac{\sigma_-}{U_0 k} + \frac{en_+\mu_-}{U_0 k} - \frac{\sigma_-}{U_0 k\tau_+\omega_0} - \frac{\sigma_-}{U_0 k\tau_-\omega_0} - \frac{en_+\mu_-}{U_0 k\tau_-\omega_0} + \frac{kD_- \varepsilon}{U_0} \frac{1}{4\pi\omega_0\tau_+} + \frac{kD_- \varepsilon}{U_0} \frac{1}{4\pi\omega_0\tau_-} - \frac{\sigma_-\beta_-}{kU_0\tau_-\omega_0} \right) \quad (37)$$

After a simple calculation taking into account the experiment $n_+ = n$ [5] from (37) we obtain:

$$\omega = \omega_0 \left\{ 1 + \frac{\sigma_- D_+ k}{U_0 \sigma_0} \left[-\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\tau_+}{\tau_-} \right)^2 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\tau_-}{\tau_+} \right)^2 + \frac{\beta_- \sigma_0 \tau_+}{4\pi} \right] \right\} = \omega_0 + \Delta\omega \quad (38)$$

In the experiment [5] $\tau_+ > \tau_-$, therefore, $\Delta\omega > 0$ and the frequency of oscillation of the electric field only increases in course of time. In contrast to the frequency, the amplitude of oscillation varies difficultly in course of time.

In order to calculate the current density fluctuation

$$J' = J'_- + J'_+ \quad (39)$$

it is necessary to introduce values $E' = E_1(t) \cos(\omega t + \theta)$ and n'_+ , n'_- into (39) to calculate J' as a function of time t . This task is easily solved, but it is necessary to perform cumbersome algebra. An attentive reader can easily accomplish this task. However, the nature of variations in the alternating electric field does not change.

REFERENCES

1. Non- linear Fluctuations of Concentration of Charge Carriers and an Electric Field in Semiconductors E.R. Hasanov, I.I. Mustafayeva ICTPE- 2017. 196-200. 21-23 September. VAN. TURKEY. Conference.
2. The Nonlinear Theory of GUNN'S Effect Eldar Rasuloglu Hasanov¹, Rugiye Keremkızı Gasımova¹, Akber Zeynelabdinoglu Panahov² and Ali Ihsan Demirel² Progress of Theoretical Physics, Vol.121, No.3. March 2009. 593-601
3. Ultrahigh Frequency Generation in GaAs -type Two-Valley Semiconductors E.R.Hasanov¹, R.K.Gasımova¹, A.Z.Panahov² and A.I. Demirel² Adv.Studies Theor. Phys, Vol 3, 2009, no.8. 293-298.
4. High Frequency Energy Radiation of n- Type Semiconductors at Constant Electric and Magnetic Field Eldar Rasuloglu Hasanov¹, Akber Zeynelabdinoglu Panahov^{1,2} and Ali Ihsan Demirel². Adv. Studies Theor. Phys. Vol.7. 2013. No 21, 1035-1042.
5. Неустойчивость электронно-дырочной плазмы полупроводника, обусловленная нелинейностью вольт-амперных характеристик М.И. Иглицын, Э.Г. Пель, Л.Я. Первова и В.И. Фистул
6. ФТТ.1966. Том.8. вып. 12. Стр. 3606-3613. Н.Н. Боголюбов , Ю.А. Митропольский Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва 1963.

UDC 621.315.592PACS: 72.40, +w

BASIC PARAMETERS AND CHARACTERISTICS OF ANISOTYPE p-GaSe<Ho>/n-InSe<Ho> HETEROSTRUCTURES

A.Sh. ABDINOV¹, R.F. BABAEVA²

¹ Baku State University

² Azerbaijan State Economic University

Baku / AZERBAIJAN

abdinov-axmed@yandex.ru, babaeva-rena@yandex.ru

ABSTRACT

Electrical and photoelectric characteristics of the anisotype heterojunctions created by direct mounting on optical contact thin layers of layered p-GaSe and n-InSe semiconductors, doped with holmium (Ho) in various percentages ($N \approx 10^{-5}$; 10^{-4} ; 10^{-3} ; 10^{-2} and 10^{-1} at.%) have been studied experimentally. It is established that p-GaSe<Ho>/n-InSe<Ho> heterostructures may be promising elements to create converters of the photovoltaic solar energy into electrical one with controlled parameters by changing the doping level of contacting couples with Ho.

Keywords: heterostructure, doping, holmium, current-voltage characteristics, nature of the diode, optical contact, photoelectric converter.

ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ АНИЗОТИПНЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУР p-GaSe<Ho>/n-InSe<Ho>

РЕЗЮМЕ

Экспериментально измерены основные параметры и характеристики анизотипных гетероструктур, созданных на контакте тонких слоев монокристаллов *p-GaSe* и *n-InSe*, легированных гольмием (*Ho*) с различным процентным содержанием ($N \approx 10^{-5}$; 10^{-4} ; 10^{-3} ; 10^{-2} и 10^{-1} ат.%). Показано их перспективность для создания фотоэлектрических преобразователей солнечной энергии с управляемыми параметрами и характеристиками, путем варьирования содержания введенной примеси - *Ho*.

Ключевые слова: гетероструктура, примесь, гольмий, вольт-амперная характеристика, выпрямляющий характер, оптический контакт, анизотипный, преобразователь солнечной энергии.

ANİZOTİP p-GaSe<Ho>/n-InSe<Ho> HETEROSTRUKTURLARININ ƏSAS PARAMETR VƏ XARAKTERİSTİKALARI

XÜLASƏ

Təcrübi olaraq müxtəlif faiz miqdarında ($N \approx 10^{-5}$; 10^{-4} ; 10^{-3} ; 10^{-2} və 10^{-1} at.%) holmiumla (*Ho*) aşqarlanmış p-GaSe və n-InSe monokristallarının nazik təbəqələrinin kontaktında yaradılmış anizotip heterostruturların əsas parametr və xarakteristikaları ölçülmüşdür. Bu heterostruturların parametr və xarakteristikaları daxil edilən aşqarın – *Ho* miqdarını dəyişməklə idarə olunan günəş fotoelementləri düzəltmək üçün perspektivli olduğu göstərilmişdir.

Açar sözlər: heterostruktur, aşqar, holmium, volt-ampere xarakteristikası, düzləndirici xarakter, optik kontakt, anizotip, günəş enerjisi çeviricisi.

I. Introduction

Possessing unique physical [1, 2], including photoelectric and contact properties of layered crystals of gallium monoselenides (*GaSe*) and indium (*InSe*) [3, 4] make them promising materials for photo- and optoelectronics [5]. High photosensitivity at room temperature in all visible, near UV and the beginning of the near infra-red range ($0.30 \leq \lambda \leq 1.20 \mu\text{m}$) of the optical spectrum causes interest in these semiconductors as promising materials for the creation of solar photoelectric converters [6]. After reporting the possibility of creating heterostructures

based on p -GaSe and n -InSe single crystals by mounting their thin layers on direct optical contact [7], as well as the purposeful control of the photoelectric parameters and characteristics of these semiconductors by doping with various lanthanides [8, 9], this problem became even more urgent. However, the peculiarities of the effect of doping by various impurities, including lanthanoids, have not been thoroughly studied and require additional experimental studies. In this connection, in the present work we experimentally investigated the main parameters and characteristics of anisotropic heterostructures created at the contact of thin layers of p -GaSe and n -InSe single crystals doped with holmium (Ho) with different percentages ($N \approx 10^{-5} \div 10^{-1}$ at.%).

II. Samples and Measurement Mode

Used to create the investigated heterostructures thin films with a thickness $d \leq (50 \div 200)$ μm along the "C" axis, pure (specially unalloyed) and doped with Ho with different percentage content ($N \approx 10^{-5}$; $5 \cdot 10^{-4}$; 10^{-4} ; $5 \cdot 10^{-3}$; 10^{-3} ; 10^{-2} and 10^{-1} at.%) the layers of p -GaSe and n -InSe with an atomically-mirror surface were scraped from large single-crystal ingots. Their transverse dimensions along the "C" plane of the crystal were $(3 \div 5) \times (3 \div 6)$ mm^2 . Synthesis of both compounds was carried out by the traditional method of joint fusion in evacuated quartz ampoules under a special temperature regime of composite (initial) components taken in the stoichiometric ratio. To obtain a uniform ingot, the method of vibration mixing of the alloy was used. As the initial components (substances), metal indium (In), gallium (Ga) and granulated selenium (Se) with a purity of 99.999% were used. As a dopant, chemically pure holmium was used.

The growth of single crystals of both crystal groups (pure and doped with holmium $InSe$, $GaSe$) was performed by a modified Bridgman method [10, 11], and their doping - by introducing into the charge mixture before the synthesis process in the required amount of crushed Ho [11].

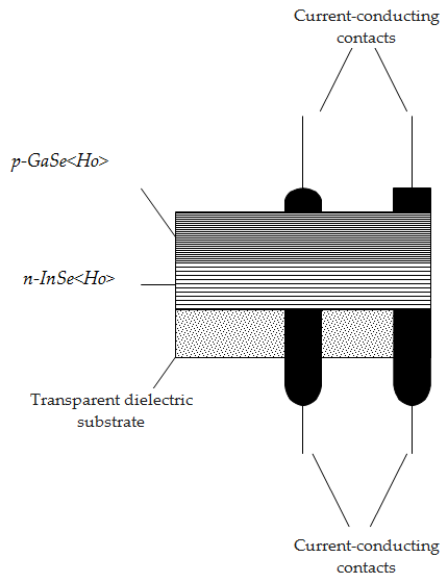
The structure, phase and elemental composition of the obtained ingots and the state of the surface along the "C" plane of the samples under study were determined by carrying out complex X-ray diffraction, X-ray diffraction, thermographic, X-ray spectroscopic and microscopic analyzes. For this purpose modern and quite reliable measuring installations (DSC-910, ADV NCE-8D, SINTECP 21, DRON-4-07 with $\text{CuK}\alpha$ -radiation at step 0.050 and range of angles 8 - 135° , SEM of the firm Zeiss with energy dispersive analysis) were applied.

It was found that the resulting pure and doped ingots of both semiconductors are homogeneous and possess a high degree of single crystal structure; the diffractograms of indium monoselenide crystals are indexed in the rhombohedral syngony (γ -polytype) and refer to the space group $R3m$ (C_{3v}^5) with the periods of the unit cell $a \approx 4.003$ \AA , $c \approx 24.955$ \AA [12]; and the diffraction patterns of gallium monoselenide crystals are indexed in the hexagonal system (γ -polytype) and belong to the space group D_{3h}^1 ($P\bar{6}$) with elementary cell periods $a \approx 3.744$ \AA , $c \approx 15.902$ \AA [13, 14]; no substitution phases for selenium, oxide and free Ho are detected, and there are no heterogeneities and extraneous phases on their surface. The measurements carried out to determine the sign of the Hall coefficient showed that under all the conditions considered by us, the single crystals of indium selenide studied have n -type, and single crystals of gallium selenide are of p -type conductivity.

Due to the atomically mirror-like surface of the contacting components [15], in their contact areas are not created a large density of surface states, which usually greatly impair the contact parameters [16], and the absence of a fused or diffusion layer eliminates all catastrophic mechanical stresses caused by the difference in the coefficients of thermal expansion [16].

Created outdoors by soldering without flux indium metal current leading contacts were arranged so, that in addition to the measurement of the current-voltage (I-V) and capacitance-voltage (C-V) characteristics of the studied structures, if required, could also be illuminated from the side of the wide-band (p-GaSe) and narrow-band (n-InSe) contacting component. The geometry of the studied structures was chosen so, that in the operating mode the current flow perpendicular to the natural layers of crystals and the contact plane (Fig. 1). Lighting of the structure was also carried out in this direction.

Fig. 1. Schematic representation of heterostructures $p\text{-GaSe}\langle\text{Ho}\rangle/n\text{-InSe}\langle\text{Ho}\rangle$



Measurements were made in the range $(77\div 350)$ K, at wavelengths and light intensities $0.20\leq\lambda\leq 1.60\ \mu\text{m}$ and $\Phi\leq 5\cdot 10^2\ \text{Lk}$, respectively.

III. Experimental Results

We measured the dark static CVC for $p\text{-GaSe}\langle\text{Ho}\rangle/n\text{-InSe}\langle\text{Ho}\rangle$ structures with different N (Fig. 2). It is established that all the investigated structures within the limits of the external conditions (temperatures, values of the applied external electric voltage, intensities and wave lengths of light) have diode (rectifying) character, with a forward direction when the positive polarity of the external electric voltage is applied to the gallium selenide layer. At temperatures below room temperature and voltages $\sim 4\div 5\ \text{V}$, the rectification coefficient is $\sim 8\div 10$ for different structures, and the straight branch of the dark current-voltage characteristic at relatively low voltages obeys the dependence [16, 17]:

$$I = I_0 \left\{ \exp \frac{eU}{\beta kT} - 1 \right\} \quad (1)$$

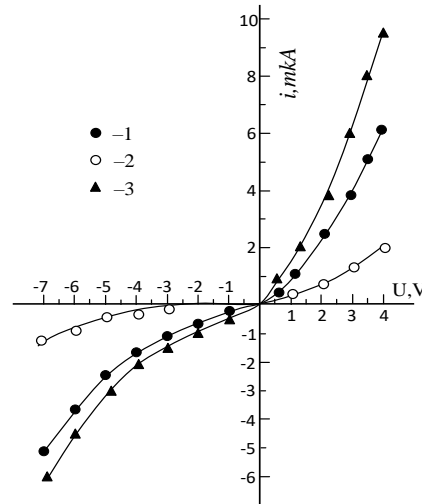
The parameter B in the expression (1) has the values $\sim 2\div 5$ for different structures. At voltages $U\geq 3.0\ \text{V}$ the exponential course of the direct branch of the current-voltage characteristic is replaced by a linear one:

$$U = U_{oc} + R_0 I . \quad (2)$$

Here, U_{oc} is the cutoff voltage, and R_0 is the residual resistance of the heterostructure under consideration. Depending on the amount of impurity introduced N , the values of U_{oc} and R_0

at 200 K are $\sim 10^4 \div 3 \cdot 10^5 \Omega$, respectively. At 300 K, in the first approximation, the value of U_{oc} corresponds to the potential barrier height of the ($eU_{oc} = e\phi_0$) at the contact. With a decrease in temperature down to 77 K, the value of R_0 sharply rises.

Fig. 2. CVC of $p\text{-GaSe}\langle\text{Ho}\rangle/n\text{-InSe}\langle\text{Ho}\rangle$ structures for various N .
 N , at. %: 1-0; 2- 10^{-3} ; 3- 10^{-1} . $T = 200$ K.



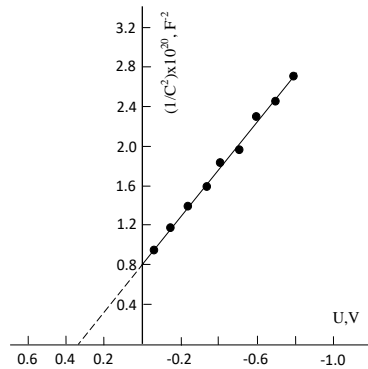
Both numerical values and the degree of stability and repeatability of individual electrical parameters (current cutoff voltage, residual resistance, rectification coefficient, β -parameter [16, 17]) depend on N . Resistance $p\text{-GaSe}\langle\text{Ho}\rangle$ and $n\text{-InSe}\langle\text{Ho}\rangle$ components with N varies non-monotonically. In particular, with the growth of N , first (at $N \leq 10^{-4}$ at.%) the resistance of these materials increases by almost an order of magnitude relative to the initial (taking place for pure crystals), and then (at $N > 10^{-3}$ at.%) decreases and at $N \geq 10^{-1}$ at.% becomes even less than the initial one. With a change in N , change non-monotonically (first worsen, and then improve with respect to the initial state) also the degree of stability and repeatability of the electrical parameters of the structures studied. It is established that the parameter I_0 entering into the expression (1) varies with the temperature according to the law $I_0 \approx \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$. The value of $\Delta\varepsilon$ found from the plot of the curve $\ln I_0\left(\frac{1}{kT}\right)$ is ~ 0.40 eV and does not change with N .

In the study of the capacitance-voltage characteristic (CVC) of the $p\text{-GaSe}\langle\text{Ho}\rangle/n\text{-InSe}\langle\text{Ho}\rangle$ structures it was established that under the conditions considered by us, regardless of the value of N , it obeys the law $1/C^2 \sim U$ (Fig. 3). This result indicates that the structures studied by us are sharp [16, 17]. The total bending of the bands in the heterojunction region determined for the point of intersection of the straight line $1/C^2 = f(U)$ with the U axis is ~ 0.50 eV for almost all the structures considered.

The photoelectric properties of the $p\text{-GaSe}\langle\text{Ho}\rangle/n\text{-InSe}\langle\text{Ho}\rangle$ heterostructures have been studied in the photovoltaic regime. The spectral distribution of the photoelectric effect was registered (Fig. 4). It turned out that in this case in all the cases considered $p\text{-GaSe}\langle\text{Ho}\rangle$ is charged negatively with respect to the second contacting component ($n\text{-InSe}\langle\text{Ho}\rangle$). The measurements were carried out in a pulsed mode of illumination within the frequency range of 100-150 Hz. Under other identical conditions, the maximum value of the photovoltage is observed when the structures under study are illuminated from the $p\text{-GaSe}\langle\text{Ho}\rangle$ side. When the illumination of the studied heterostructures is carried out from the side of narrow-band component of the contacting pair (from the side of $n\text{-InSe}\langle\text{Ho}\rangle$), the nature of the photosensitivity spectrum is completely

determined by the absorption in the narrow-band semiconductor component (in *n-InSe<Ho>*) and is similar to the spectrum of a photoresist based on it (Fig. 4, curve 1), with the only difference being that a discontinuity is observed in the short-wavelength region of the spectrum (at $\lambda \leq 0.50 \mu\text{m}$).

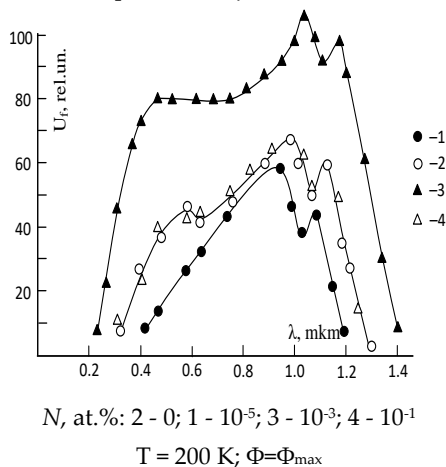
Fig. 3. The capacitance-voltage characteristics of *p-GaSe<Ho>/n-InSe<Ho>* structures
 $T = 200 \text{ K}; N = 10^{-2} \text{ at.}\%$



When the investigated structures are illuminated from the side of wide-band component (from the *p-GaSe<Ho>* side), two regions are observed in the photosensitivity spectrum (photo-e.m.f.) (Fig. 4, curves 2-4). The first of these (the short-wave region) is associated with the absorption of light in the wide-band component (in *p-GaSe<Ho>*), and the second (long-wavelength) with absorption of light in the narrow-band component (in *n-InSe<Ho>*) of the contacting pairs. Under optimal conditions, the open-circuit voltage (U_x) and short-circuit current ($i_{s.c.}$) in the structures under study are $\sim 0.34 \text{ V}$ and $\sim 32 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, respectively.

It was established that in both cases (both under illumination from the side of gallium selenide layer and from the side of the indium selenide layer) in *p-GaSe<Ho>/n-InSe<Ho>* structures with $N \approx 10^{-5} \text{ at.}\%$ at 77 K the magnitude and width of the spectral distribution of the photo-e.m.f. increase with respect to the *p-GaSe/n-InSe* structures. With further growth of N , the magnitude of the photo-e.m.f. and the width of its spectrum decrease, approaching the original one. However, wherein the photoelectric parameters of the studied structures become more stable and reproducible.

Fig. 4. The photo-e.m.f. spectrum in *p-GaSe<Ho>/n-InSe<Ho>* structures.



1 - when illuminated from the *n-InSe<Ho>* side.
 2-4 -when illuminated from the *p-GaSe<Ho>* side.

When illuminated from the *p-GaSe<Ho>* side, the photosensitivity spectrum of the structures under study significantly expands, and almost covers the wavelength range from $\sim 0.25 \mu\text{m}$ up to $1.45 \mu\text{m}$, depending on the value of N . It should be noted that the largest width of the spectrum (from $\sim 0.25 \mu\text{m}$ to $1.45 \mu\text{m}$) is observed for a structure with $N \approx 10^{-3}$ at%, when illuminated from the side of gallium selenide. With increasing content of the introduced impurity to $N \approx 10^{-1}$ at.%, the long-wavelength spectral limit shifts to the short-wave side to $\sim 1.30 \mu\text{m}$, and the short-wave side to $\sim 0.35 \mu\text{m}$.

IV. Discussion of the Results

Going to the discussion of the experimental results obtained by us, it should first of all be noted that an increase in the reverse current through the investigated structures with an increase in the content of the introduced impurity-holmium, under other identical conditions, may be due to the dependence of the degree of disorder of the *p-GaSe* and *n-InSe* crystals on N [8, 9].

The initial weak growth of the reverse current in the structures under study can be explained by the contribution of the leakage current in the reverse-biased structures, and the change in the value of U_0 with N can be explained by the dependence of the degree of disorder of the *p-GaSe<Ho>* and *n-InSe<Ho>* single crystals on N [8, 9].

The broadening of the photosensitivity spectrum of the structures under study when illuminated from the *p-GaSe<Ho>* side is, to all appearances, related to the "window effect" [16, 17], and the sharp decrease in photosensitivity from the side of short wavelengths - with a small diffusion length of the photocarriers in the direction of axis "C", in comparison with the thickness of the contacting components.

V. Conclusions

The experimental results obtained by us show that the photosensitivity region for holmium-doped single crystals of indium and gallium selenides during their putting together covers a very wide and highly energy-absorbing range of solar radiation, and when heterostructures based on these semiconductors are illuminated with photoactive light even at $T \geq 300 \text{ K}$ a significant photo e.m.f. occurs. All these facts indicate that the *p-GaSe<Ho>/n-InSe<Ho>* heterostructures are promising functional elements for the creation of photoelectric converters of solar energy into electrical energy with controlled parameters by varying the doping level of the contacting pairs.

REFERENCES

- [1] Z.S.Medvedeva. Chalcogenides of elements of the III B subgroup of the periodic system. Moscow: Nauka, 1968. - 216 p. (in Russian).
- [2] N.Kh.Abrikosov, V.F.Bankina, L.V.Poretskaya, et al. Semiconductor chalcogenides and their alloys. Moscow: Nauka, 1975. 219 p. (in Russian).
- [3] A.Sh.Abdinov, R.F.Babayeva, R.M.Rzayev, N.A.Ragimova, S.I.Amirova. On the problem of the features of the intrinsic photoconductivity of gallium monoselenide crystals. // Journal of Qafqaz University - physics. 2013. V. 1. p.16-27 (in Russian).
- [4] A.Sh.Abdinov, R.F.Babaeva, R.M.Rzayev. On the problem of the photoconductivity of indium monoselenide crystals // Bulletin of the Baku University, Ser. phys.-mat. Sciences, 2011, No. 2, p. 89-98 (in Russian).
- [5] A.M.Filachev, I.I.Taubkin, M.A.Trishenkov. Solid-state photoelectronics. Photodiodes. M.: Fizmatkniga. 2011. - 448 p. (in Russian).
- [6] A.Ambrozyak. Design and technology of semiconductor photovoltaic devices. M.: Soviet radio. 1970. - 392 p. (in Russian).

- [7] V.L.Bakumenko, Z.D.Kovalyuk, L.N.Kurbatov, V.G.Tagayev, V.F.Chishko. Investigation of InSe-GaSe heterojunctions prepared by mounting on optical contact. I. Electrical characteristics of unlighted junctions // FTP. 1980. Vol. 6, p. 1115-1119 (in Russian).
- [8] A.Sh.Abdinov, R.F.Babayeva, M.A.Jafarov, R.M.Rzayev, N.A.Ragimova. Effect of dysprosium doping on the photoelectric properties of gallium selenide monocrystals. // *Inorganic Materials*, 1999, Vol. 35, No. 4, p. 410-412 (in Russian).
- [9] A.Sh.Abdinov, R.F.Babayeva, R.M.Rzayev, E.A.Rasulov. Specific features of the photoconductivity of indium monoselenide crystals // *Bulletin of Baku University, Series of physical and mathematical sciences*. 2015, No. 1, p. 129-136 (in Russian).
- [10] R.F.Mekhtiyev, G.B.Abdullayev, G.A.Akhundov. A technique for growing p-GaSe single crystals and studying some of their properties // *Dokl. AS of the Azerbaijan SSR*. 1962. V. 18. No. 6. P. 11-17 (in Russian).
- [11] A.M.Huseynov, T.I.Sadikhov. Prepare of indium selenide single crystals doped with rare-earth elements / *Electrophysical properties of semiconductors and gas-discharge plasma*. Baku: ASU, 1989. P. 42-44 (in Russian).
- [12] *Physico-chemical properties of semiconductor substances. Handbook*. M.: "Science", 1979 - 339 p. (in Russian).
- [13] A.Kuhn, A.Chevy, R.Chevalier. Crystal Structure and Interatomic Distances in GaSe // *Phys. stat. sol. (a)*. 1975. V. 31. No. 2. pp. 469-475.
- [14] Z.D.Kovalyuk, V.B.Bolezdnyuk, V.V.Shevchik, V.M.Kaminsky, A.D.Shevchenko. Ferromagnetism of the layered GaSe semiconductors, intercalated with cobalt // *ФТП*, 2012, V. 46, No. 8, p. 995-998 (in Russian).
- [15] T.Ohta, A.Klust, J.A.Adams, Q.Yu, M.A.Olmstead, F.S.Ohuchi. Atomic structures of defects at GaSe/Si (111) heterointerfaces studied by scanning tunneling microscopy. // *Phys. Rev.* 2004. B 69, 125322.
- [16] B.L.Sharma, R.K.Pirohit. *Semiconductor heterojunctions*. Moscow: Soviet Radio, 1979. - 228 p. (in Russian).
- [17] A.Milnis, D.Foicht. *Heterojunctions and metal-semiconductor junctions*. Moscow: Mir, 1975. -432p. (in Russian).

UOT: 531:530.145PACS : 03.65.Ge, 03.65.Fd, 02.30.Gp

ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE SCHRÖDINGER EQUATION WITH THE GENERALIZED WOODS-SAXON POTENTIAL FOR ARBITRARY l - STATE

V.H. BADALOV

Institute for Physical Problems

Baku State University

Baku / AZERBAIJAN

badalovvatan@yahoo.com

ABSTRACT

In this work, the analytical solutions of the radial Schrödinger equation have been studied for the generalized Wood-Saxon potential by using the Pekeris approximation. The energy eigenvalues and radial wavefunctions were found for any l - state via the Nikiforov-Uvarov and Asymptotic iteration methods. In this way, the same expressions were obtained for the energy eigenvalues, and the expression of radial wavefunctions transformed each other was shown owing to these methods. Furthermore, the bound state energies and the corresponding normalized radial wavefunctions of the neutrons moving around a ^{56}Fe nucleus are also calculated.

Keywords: Generalized Wood-Saxon potential, Nikiforov - Uvarov method, asymptotic iteration method.

ÜMUMİLƏŞMİŞ VUD-SAKSON POTENSIALI ÜÇÜN ŞREDİNGER TƏNLIYİNİN İXTİYARİ l - HALINDA ANALİTİK HƏLLİ

XÜLASƏ

İşdə Pekeris yaxınlaşmasının köməylə ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün radial Şredinger tənliyinin analitik həlləri araşdırılmışdır. İxtiyari l - halı üçün Nikiforov-Uvarov və Asimptotik iterasiya metodlarından istifadə etməklə enerjinin məxsusi qiymətləri və radial dalğa funksiyaları tapılmışdır. Belə ki, bu metodların köməylə enerjinin məxsusi qiymətləri üçün eyni ifadələr alınmış və radial dalğa funksiyalarının ifadələrinin bir-birinə keçməsi göstərilmişdir. Bundan başqa, ^{56}Fe nüvə sahəsində hərəkət edən neytronun əlaqəli halların enerjisi və uyğun normalaşmış dalğa funksiyaları hesablanmışdır.

Açar sözlər: Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı, Nikiforov-Uvarov metodu, asimptotik iterasiya metodu.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ОБОБЩЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА ВУДСА-САКСОНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО l - СОСТОЯНИЯ

РЕЗЮМЕ

В работе были изучены аналитические решения радиального уравнения Шредингера для обобщенного потенциала Вудса-Саксона с помощью аппроксимация Пекериса. С использованием методов Никифорова-Уварова, и Асимптотической итерации были найдены собственные значения энергии и волновой функции для произвольного l состояния. Таким образом, с помощью этих методов были получены одни и те же выражения для собственные значения энергии и были показаны выражения для радиальных волновых функций, которые переходят друг к другу. Кроме того, были вычислены энергии связанные состояния и соответствующие нормализованные радиальные волновая функции нейтронов, перемещающихся в поле ядра ^{56}Fe .

Ключевые слова: Обобщенные потенциала Вудса-Саксона, метод Никифорова-Уварова; метод асимптотической итерации.

I. Giriş

Vud-Sakson potensialı ilk dəfə R.D. Woods və D.S. Sakson tərəfindən keçən əsrin təxminən altımışını illərində 20 MeV enerjili protonun orta və ağır nüvələrdən elastiki səpilməsini izah etmək üçün təklif edilmiş ən mühüm yaxına təsir potensialıdır [1]. Uzun illərdir ki, Vud-Sak-

son potensialı nüvənin bir zərrəcikli enerji səviyyələrini və nüvə–nüvə qarşılıqlı təsirini müəyyən etmək üçün ən sərfəli modeldir [2]. Vud-Sakson potensialı sahəsində dalğa tənliklərinin (Şredinger, Dirak, Kleyn-Gordon və i.a.) dəqiq analitik həlli nüvənin nuklonlarla qarşılıqlı təsirinin əlaqəli və rezonans halları üçün çox əhəmiyyətlidir. Vud-Sakson potensialının modifikasiya forması həcmi (standart) Vud-Sakson potensialı ilə səth Vud-Sakson potensialın cəminə bərabərdir [3-5]:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{We^{-\frac{r-R_0}{a}}}{\left(1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \quad (a \ll R_0) \quad (1.1)$$

burada V_0 və W uyğun olaraq həcmi və səth potensial çuxurların dərinliyi, R_0 -potensialın eni və ya nüvənin radiusu, a - parametri isə səth təbəqəsinin qalınlığı və o , ionlaşma enerjisinin təcrübi qiyməti ilə müəyyən olunur. Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialında səth hissəsi əsasən səthə yaxın oblastda əlavə potensial çuxur yaradır ki, bu da nüvə reaksiyalarında elastiki səpilmələrin izahında çox əhəmiyyətli yer tutur. Bundan başqa səth Vud-Sakson potensialında $W < 0$ olduqda bu potensial nüvədə rezonans (kvaziəlaqəli) halların izahında istifadə oluna bilər. Belə ki, ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialının bir neçə xüsusi halları vardır: $W = 0$ olduqda ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı həcmi (standart) Vud-Sakson potensialına [6]; $W = 0$ və $a \rightarrow 0$ olduqda nüvə səthində potensialın sıçraması ilə o sadə potensial çuxura çevrilir [6] və $R_0 = 0$ olduqda ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı Rosen-Mors potensialına gəlir [7].

Dalğa funksiyası kvant sisteminin tam təsvir olunması üçün bütün vacib informasiyanı özündə əks etdirir. Ona görə də sistemin izahında dalğa tənliyinin ədədi hesablamadan alınan həllinə nisbətən onun dəqiq analitik həlli daha məqsədli və çox əhəmiyyətlidir. Belə ki, $l \neq 0$ olduqda bir neçə potensiallarda, o cümlədən harmonik ossilyator, Kulon, Kratzer və i.a. dalğa tənliklərinin dəqiq həlli mümkündür [6]. Qeyri-relyativistik kvant mexanikasında sferik simmetrik potensial sahələrdə dalğa tənliklərini həll etmək üçün bir çox üsullar - polinom usulu [6-9], Nikiforov-Uvarov (NU) metodu [10], Supersimmetrik Kvant Mexanikası (SYM)[11], Asimptotik İterasiya Metodu (AİM) [12-15] işlənib hazırlanmışdır.

Orbital kvant ədədinin ixtiyari qiyməti üçün $l \neq 0$ radial Şredinger tənliyi Vud-Sakson potensialları üçün dəqiq həll oluna bilmir. Belə ki, S. Flugge $l = 0$ halında həcmi Vud-Sakson potensialı sahəsində radial Şredinger tənliyini analitik həll edərək dalğa funksiyası üçün dəqiq ifadə almış, lakin enerjinin məxsusi qiymətlərini qrafik üsulla tapmışdır [6]. C.Berkdemir və digərləri tərəfindən orbital kvant ədədinin $l = 0$ halında ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün radial Şredinger tənliyinin həlli NU metodunun [3] köməyilə araşdırılmışdır. Lakin, bu işdə onlar NU metodunun tətbiqində səhvə yol vermiş, bu da düzgün olmayan nəticələrə gətirib çıxarmışdır [16]. Belə ki, Vud-Sakson potensialı sahəsinə Nikiforov-Uvarov və Asimptotik İterasiya metodlarının tətbiqində səhvə yol vermiş digər [17-19] işləri də göstərmək olar.

Qeyd edək ki, $l \neq 0$ halında dalğa tənliklərinin təqribi analitik həllini tapmaq üçün bir neçə yaxınlaşma var ki, onlardan ən çox geniş istifadə ediləni Pekeris tərəfindən təklif olunan yaxınlaşmadır [20]. Pekeris yaxınlaşması mərkəzəqaçma çəpərinin nüvələr arası məsafəsindən asılı olub, ikinci tərtibə qədər həddləri nəzərə almaqla eksponensiallara görə sıraya ayrılmağa əsaslanır. Greene və Aldrich [21] tərəfindən mərkəzəqaçma çəpəri üçün

$$\frac{1}{r^2} \approx \delta^2 \frac{e^{\delta r}}{(1 - e^{\delta r})^2} \quad (1.2)$$

yaxınlaşması təklif olunmuşdur. Lakin bu yaxınlaşma ekranlaşma δ parametrinin kiçik qiymətlərində doğrudur.

İlk dəfə Pekeris yaxınlaşmasında NU metodunun köməyi ilə Vud-Sakson potensialı sahəsində radial Şredinger və radial Kleyn-Qordon tənlikləri $l \neq 0$ halı üçün analitik həll olunmuş, enerjinin məxsusi qiymətləri və dalğa funksiyaları tapılmışdır [22-24]. Həmçinin, [25]-də Vud-Sakson potensialı üçün D -ölçülü Sredinger tənliyi ixtiyari l halında mərkəzəqaçma potensialına Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə analitik həll olunmuşdur. Bütün bu [22-25] işlərdə

ixtiyari l halında $V_l(r) = \frac{\hbar^2 \tilde{l}(\tilde{l} + 1)}{2\mu r^2}$ mərkəzəqaçma potensialı üçün aşağıdakı approkmaksiya sxemi – Pekeris yaxınlaşması təklif edilmişdir:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{C_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \right) \quad (1.3)$$

Burada R_0 və a parametrlərindən asılı olan C_0 , C_1 , C_2 kəmiyyətləri (1.3) münasibətinin hər iki tərəfini nüvənin səthi yaxınlığında - $r = R_0$ nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayırmaqla müqayisədən təyin olunan parametrlərdir. Amma, [26]- də ixtiyari l halında effektiv $V_{eff}(r)$ potensialın $r = r_{\min}$ minimum nöqtəsi ətrafında müəyyən olunan C_0 , C_1 , C_2 approksimasiya parametrləri əsasında $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialına (1.3) Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə NU və SYM metodlarının köməyi ilə Vud-Sakson potensialı üçün D - ölçülü Sredinger tənliyi analitik həll edilmişdir. Burada məlum oldu ki, $D=3$ və $D=4$ olduqda $n_r = 0$, $l=0$ qiymətində sistemin əlaqəli hallarının olmaması standart Vud-Sakson potensialının sistemi tam təsvir edə bilməməsi ilə bağlıdır [26]. Bundan çıxış yolu kimi ya standard Vud-Sakson potensialının modifikasiya olunmuş formasından (məsələn, ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı) ya da standard Vud-Sakson potensialında spin və pseudospin simmetriyasından [27, 28] istifadə etməklə ola bilər. Ona görə də, ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı sahəsində radial Şredinger tənliyinin həllərini tədqiq etmək aktualdır və böyük maraq kəsb edir.

İşdə ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün radial Sredinger tənliyini analitik həll edərək enerji spektri və dalğa funksiyası tapılmışdır. Hesablamalar ixtiyari l halında (1.1) ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialın $r = r_{\min}$ minimum nöqtəsi ətrafında müəyyən olunan C_0 , C_1 , C_2 approksimasiya parametrləri əsasında $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialına (1.3) Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə Nikiforov-Uvarov və Asimptotik iterasiya metodlarının köməyi ilə aparılmışdır.

II. Şredinger tənliyi

Sferik simmetrik $V(r)$ potensialı sahəsində Şredinger tənliyi aşağıdakı kimidir [8, 9]:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) - E \right) \psi(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (2.1)$$

burada μ - sistemin gətirilmiş kütləsi, θ - polyar bucaq, φ - azimutal bucaq, \hbar - isə Plank sabitidir. Laplas $\Delta = \vec{\nabla}^2$ operatoru radial $\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$ və bucaq $\frac{\nabla_{\theta, \varphi}^2}{r^2} = -\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}$ hissələrinə ayrılır, yəni

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \quad (2.2)$$

olduğundan (2.1) tənliyinin həlli sferik koordinat sistemində

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) \quad (2.3)$$

şəklində axtarıla bilər. Verilmiş $Y(\theta, \varphi)$ sferik funksiyası üçün

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.3)$$

tənliyi ödənilir, burada l - orbital kvant ədədi və m isə maqnit kvant ədədidir.

(2.2), (2.3) və (2.4) ifadələrini (2.1) tənliyində yerinə yazıb və müəyyən çevirmələrdən sonra $R(r)$ radial funksiya

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R(r) = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (2.5)$$

tənliyini ödəyir. Yeni $u(r) = rR(r)$ funksiyası üçün (2.5) tənliyi

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u(r) = 0, \quad (2.6)$$

burada $V_{eff}(r)$ - effektiv potensialdır və

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \quad (2.7)$$

kimi təyin olunur. (2.6) tənliyi iki mühüm halı çıxmaqla bir ölçülü hissəcik üçün yazılmış tənliklə eyni formadadır. Bunlardan birincisi, $\hbar^2 l(l+1)$ məxsusi qiymətlərinə uyğun olan effektiv potensialın mövcudluğu; ikincisi, radial dalğa funksiyasının $u(0) = 0$ və $u(\infty) = 0$ sərhəd şərtlərinin ödənməsidir. (2.7)-dən görünür ki, effektiv potensial eksponensial və orbital mərkəzəqaçma potensiallarının kombinasiyasından ibarətdir. Orbital kvant ədədinin $l \neq 0$ qiymətində supersimmetrik kvant mexanikası, asimptotik iterasiya, Nikiforov-Uvarov və s. üsullardan istifadə etməklə bu potensial üçün Şredinger tənliyini dəqiq həll etmək mümkün deyil, buna səbəb olan effektiv $V_{eff}(r)$ potensialın ifadəsindəki orbital mərkəzəqaçma $V_l(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$

potensialıdır. Ona görə bu problemi həll etmək üçün daha səmərəli Pekeris yaxınlaşmasından istifadə edək. Bu məqsədlə yeni $x = \frac{r-R_0}{R_0}$ dəyişənini daxil edib ($r = R_0(1+x)$) orbital mərkəzəqaçma $V_l(r)$ potensialını, ümumiləşmiş Vud-Sakson $V(r)$ potensialının $\frac{dV(r)}{dr} = 0$ ekstremum

şərtindən alınan $\exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right) = \exp(\alpha x) = \frac{W-V_0}{W+V_0}$ tənliyini ödəyən $x = x_{min} = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{W-V_0}{W+V_0}\right)$ ($r = r_{min} = R_0 + a \ln\left(\frac{W-V_0}{W+V_0}\right)$) minimum nöqtəsi ətrafında Taylor sırasına ayıraq:

$$V_l(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} = \frac{\delta}{(1+x)^2} = \delta \left[\frac{1}{(1+x_e)^2} - \frac{2}{(1+x_e)^3} \cdot (x-x_e) + \frac{3}{(1+x_e)^3} \cdot (x-x_e)^2 + o((x-x_e)^3) \right], \quad (2.8)$$

burada $\delta = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2}$ - dir. Qeyd edək ki, $\exp(\alpha x) > 0$ olduğundan $\exp(\alpha x) = \frac{W-V_0}{W+V_0}$ münasibətinə əsasən $W > V_0$ və $W < -V_0$ alınır. Əgər bu şərtlər ödənməzsə, ümumiləşmiş Vud-Sakson $V(r)$ potensialının minimum nöqtəsi olmur. Pekeris approksimasiyasına görə $V_l(r)$ potensialı aşağıdakı kimi götürülür [22-24]:

$$\tilde{V}_l(r) = \delta \left(C_0 + \frac{C_1}{1+e^{\alpha x}} + \frac{C_2}{(1+e^{\alpha x})^2} \right), \quad (2.9)$$

burada $\alpha = R_0/a$ -dir. $\tilde{V}_l(r)$ potensialını $x = x_{\min}$ ($r = r_{\min}$) minimum nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayırıq:

$$\tilde{V}_l(x) = \delta \left[C_0 + \frac{C_1}{1+e^{\alpha x_e}} + \frac{C_2}{(1+e^{\alpha x_e})^2} - \left(\frac{\alpha C_1 e^{\alpha x_e}}{(1+e^{\alpha x_e})^2} + \frac{2\alpha C_2 e^{\alpha x_e}}{(1+e^{\alpha x_e})^3} \right) (x-x_e) + \right. \\ \left. - \left(\frac{\alpha^2 C_1 e^{\alpha x_e} (1-e^{\alpha x_e})}{2(1+e^{\alpha x_e})^3} + \frac{\alpha^2 C_2 e^{\alpha x_e} (1-2e^{\alpha x_e})}{(1+e^{\alpha x_e})^4} \right) (x-x_e)^2 + o((x-x_e)^3) \right] \quad (2.10)$$

(2.8) və (2.10) ifadələrində x - in eyni tərtibli uyğun hədlərinin müqayisəsindən C_0 , C_1 , C_2 sabitlərinin təyini üçün aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} C_0 + \frac{C_1}{1+e^{\alpha x_e}} + \frac{C_2}{(1+e^{\alpha x_e})^2} = \frac{1}{(1+x_e)^2} \\ \frac{\alpha C_1 e^{\alpha x_e}}{(1+e^{\alpha x_e})^2} + \frac{2\alpha C_2 e^{\alpha x_e}}{(1+e^{\alpha x_e})^3} = \frac{2}{(1+x_e)^3} \\ \frac{\alpha^2 C_1 e^{\alpha x_e} (1-e^{\alpha x_e})}{2(1+e^{\alpha x_e})^3} + \frac{\alpha^2 C_2 e^{\alpha x_e} (1-2e^{\alpha x_e})}{(1+e^{\alpha x_e})^4} = -\frac{3}{(1+x_e)^4} \end{cases} \quad (2.11)$$

(2.11) cəbri tənliklər sistemini həll etsək, tapırıq:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{(1+x_e)^2} + \frac{(1+e^{\alpha x_e})^2}{\alpha e^{\alpha x_e} (1+x_e)^3} \left[\frac{e^{-\alpha x_e} - 3}{1+e^{\alpha x_e}} + \frac{3e^{-\alpha x_e}}{\alpha(1+x_e)} \right] \\ C_1 = \frac{2(1+e^{\alpha x_e})^2}{\alpha e^{\alpha x_e} (1+x_e)^3} \left[2 - e^{-\alpha x_e} - \frac{3(1+e^{-\alpha x_e})}{\alpha(1+x_e)} \right] \\ C_2 = \frac{(1+e^{\alpha x_e})^3}{\alpha e^{\alpha x_e} (1+x_e)^3} \left[e^{-\alpha x_e} - 1 + \frac{3(1+e^{-\alpha x_e})}{\alpha(1+x_e)} \right] \end{cases} \quad (2.12)$$

Beləliklə, yeni effektiv potensial üçün alırıq:

$$\tilde{V}_{eff}(r) = V_{WS}(r) + \tilde{V}_l(r) = \delta C_0 - \frac{V_0 + W - \delta C_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{W + \delta C_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \quad (2.13)$$

Radial Şredinger tənliyinin (2.7) münasibətilə verilmiş effektiv Vud-Sakson potensialı $V_{eff}(r)$ üçün həll etmək əvəzinə Pekeris yaxınlaşmasından alınmış (2.13) münasibətilə təyin olunan $\tilde{V}_{eff}(r)$ effektiv potensialında yeni radial Şredinger tənliyini həll edək. Beləliklə, Pekeris approximasiyasına əsasən (2.6) tənliyində $V_{eff}(r)$ yerinə $\tilde{V}_{eff}(r)$ yazsaq, alırıq:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \delta C_0 + \frac{V_0 + W - \delta C_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{W + \delta C_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \right] u(r) = 0 \quad (2.14)$$

(2.14) tənliyində yeni $z = \left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^{-1}$ dəyişəninə keçsək, alırıq ($0 \leq z \leq 1$):

$$z^2(1-z)^2 u''(z) + z(1-z)(1-2z)u'(z) + \frac{2\mu a^2}{\hbar^2} [E - \delta C_0 + (V_0 + W - \delta C_1)z - (W + \delta C_2)z^2] u(z) = 0 \quad (2.15)$$

Əlaqəli halların olması üçün $E < 0$ bərabərsizliyi ödənməlidir.

$$\varepsilon^2 = -\frac{2\mu a^2 (E - \delta C_0)}{\hbar^2} > 0, \beta^2 = \frac{2\mu a^2 (V_0 + W - \delta C_1)}{\hbar^2} > 0, \gamma^2 = \frac{2\mu a^2 (W + \delta C_2)}{\hbar^2} > 0 \quad (2.16)$$

əvəzləmələri qəbul etməklə adsız kəmiyyətlərə keçsək, $u(z)$ funksiyası üçün

$$u''(z) + \frac{1-2z}{z(1-z)}u'(z) + \frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 z - \gamma^2 z^2}{(z(1-z))^2}u(z) = 0, \quad (0 \leq z \leq 1). \quad (2.17)$$

tənliyi alınar.

III. Radial Şredinger tənliyinin Nikiforov - Uvarov metodu ilə həlli

NU metoduna əsasən (A.1) və (2.17) tənliklərinin müqayisəsi nəticəsində

$$\tilde{\tau}(z) = 1 - 2z; \quad \sigma(z) = z(1-z); \quad \tilde{\sigma}(z) = -\varepsilon^2 + \beta^2 z - \gamma^2 z^2$$

olduğundan $\pi(z)$ funksiyası aşağıdakı kimi olar:

$$\pi(z) = \pm \sqrt{\varepsilon^2 + (k - \beta^2)z - (k - \gamma^2)z^2}. \quad (3.1)$$

Sabit k parametri, kökaltı ifadənin tam kvadrata malik olması, yəni onun diskriminantının sıfıra bərabər olması şərtindən tapıla bilər. Beləliklə, hər bir k üçün iki mümkün $\pi(z)$ funksiyası vardır:

$$\pi(z) = \pm \begin{cases} \left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} \right) z - \varepsilon, & \text{olduqda } k = \beta^2 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} \\ \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} \right) z - \varepsilon, & \text{olduqda } k = \beta^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}. \end{cases} \quad (3.2)$$

NU metoduna əsasən $\pi(z)$ polinomunun dörd mümkün formasından eləsini seçirik ki, bu forma polinom üçün $\tau(z)$ funksiyasının törəməsi mənfidir və kök $(0, 1)$ intervalında yerləşir, yəni $\tau'(z) < 0$, $0 \leq z \leq 1$. Buna görə $\pi(z)$ və $\tau(z)$ funksiyaları aşağıdakı formada olur:

$$\pi(z) = \varepsilon - \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} \right) z \quad (3.3)$$

$$\tau(z) = 1 + 2\varepsilon - 2 \left(1 + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} \right) z \quad (3.4)$$

$$k = \beta^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} \quad (3.5)$$

Onda $\lambda = k + \pi'(z)$ sabiti

$$\lambda = \beta^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} - \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} \quad (3.6)$$

olar. λ_{n_r} - in digər alternativ təyini olan (A.5) tənliyinə əsasən

$$\lambda = \lambda_{n_r} = 2 \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} \right) n_r + n_r(n_r + 1) \quad (3.7)$$

olur. (3.6) və (3.7) münasibətlərin müqayisəsindən alarıq:

$$\beta^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} - \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} = 2 \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} \right) n_r + n_r(n_r + 1) \quad (3.8)$$

Buradan taparıq:

$$\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + n_r + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1+4\gamma^2}}{2} \quad \text{və ya} \quad \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} = n' \quad (3.9)$$

burada

$$n' = -n_r + \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 1}{2} \quad (3.10)$$

və n_r radial kvant ədədidir ($n_r = 0, 1, 2, \dots$). Beləliklə, (3.9) münasibətindən tapırıq:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(n' + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{n'} \right). \quad (3.11)$$

Əlaqəli halların $E < 0$ və dalğa funksiyasının sonlu olması $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2 > 0$ şərtlərindən $n' > 0$ və $|\beta^2 - \gamma^2| < n'^2$ alınır. Buradan, alarıq:

$$0 \leq n_r < \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2 C_2}{R_0^2}} - 1 \right) \quad (3.12)$$

$$\left| V_0 - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} (C_1 + C_2) \right| < \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2 C_2}{R_0^2}} - 1 \right) - n_r \right]^2 \quad (3.13)$$

$$V_0 R_0^2 \geq \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu} (C_0 + C_1 + C_2) \quad (3.14)$$

ε - nun (2.16) – dəki ifadəsini (3.11) – də yerinə yazsaq enerjinin məxsusi qiymətləri üçün aşağıdakı analitik ifadəni alarıq:

$$E_{n,l} = \delta C_0 - (V_0 + W - \delta C_1) \left(\frac{n'^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\beta n'} \right)^2 \quad (3.15)$$

Beləliklə, δ , n' , β və γ -nın ifadələrini (3.15) münasibətində nəzərə alsaq enerjinin məxsusi $E_{n,l}$ qiyməti üçün tapırıq:

$$E_{n,l} = -\frac{V_0}{2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1 + C_2}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[\frac{1}{16} \left(\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2 C_2}{R_0^2}} - 2n_r - 1 \right)^2 + \frac{\left(\frac{2\mu a^2}{\hbar^2} \right)^2 \left[V_0 - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} (C_1 + C_2) \right]^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2 C_2}{R_0^2}} - 2n_r - 1 \right)^2} \right]. \quad (3.16)$$

Əgər (3.12) - (3.14) şərtlərinin hər üçü ödənilərsə, əlaqəli hallar mövcud olur. Beləliklə, (3.16) enerji spektri məhduddur, yəni enerjinin məxsusi qiymətləri sonlu sayə malik olur.

Enerjinin məxsusi qiymətləri $V_{eff} < E_{n,l} < V_l$ bərabərsizliyini ödəyir, burada $V_l = -V_0 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} (C_0 + C_1 + C_2)$

və V_{eff} ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialın r_{\min} minimum nöqtəsində effektiv potensialın $V_{eff} = V_{eff}(r_{\min}) = -\frac{(W + V_0)^2}{4W^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r_{\min}^2}$ qiymətidir. (3.16) ifadəsindən görünür ki, enerjinin məxsusi

qiyməti potensialın V_0 və W dərinliyindən, potensialın R_0 enindən və səthin a qalınlığından asılıdır. Əgər n_r və V_0 -a qoyulmuş məhdudiyətlər ödənərsə, əlaqəli hallar meydana çıxır. Ona görə deyə bilərik ki, bu potensial daxilində əlaqəli hallar mövcuddur. (3.14) bərabərsizliyindən görünür ki, l - in verilmiş qiymətində potensial çuxurun V_0 dərinliyi R_0 parametri artanda azalır və əksinə. Qeyd edək ki, ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün tapılmış dəqiq həllər müxtəlif kvant mexaniki və nüvə toqquşmaları problemlərinin öyrənilməsinə çox maraqlı əlavələr verə bilər.

Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı sahəsində radial dalğa funksiyasını təyin etmək üçün $\sigma(z)$, $\tau(z)$, $\pi(z)$ funksiyalarının ifadələrini (A.4) və (A.6) tənliklərində nəzərə alaraq birinci tər-

tib adi diferensial tənlikləri həll etsək, $(0, 1)$ intervalında sonlu $\Phi(z)$ və $\rho(z)$ funksiyalarını tapırıq:

$$\Phi(z) = z^\varepsilon (1-z)^{\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}} \quad (3.17)$$

$$\rho(z) = z^{2\varepsilon} (1-z)^{2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}} \quad (3.18)$$

Çəki funksiyasının aşkar şəklini bilərək radial dalğa funksiyasının ikinci hissəsini asanlıqla tapmaq olar. Belə ki, onu (A.4) Rodriges münasibətində nəzərə alsaq

$$y_{n_r}(z) = B_{n_r} z^{-2\varepsilon} (1-z)^{-2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}} \frac{d^{n_r}}{dz^{n_r}} \left[z^{n_r+2\varepsilon} (1-z)^{n_r+2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}} \right] \quad (3.19)$$

olar, burada B_{n_r} - normallaşma sabiti olub, $\frac{1}{n_r!}$ ifadəsinə bərabərdir [51]. Başqa sözlə, $y_n(z)$

funksiyasının Yakobi çoxhədlişi $y_{n_r}(z) = P_{n_r}^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2})}(1-2z)$ ilə verildiği müəyyən olunur. Burada $P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2z) = \frac{1}{n!} z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} [z^{n+\alpha} (1-z)^{n+\beta}]$ -dir.

Uyğun $u_{n,l}(z)$ - radial dalğa funksiyaları

$$u_{n,l}(z) = C_{n,l} z^\varepsilon (1-z)^{\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}} P_{n_r}^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2})}(1-2z), \quad (3.20)$$

kimi tapılır, burada $C_{n,l}$ normallaşma sabitidir və ortoqonallıq şərtindən tapılır:

$$\int_0^1 |R_{n,l}(r)|^2 r^2 dr = \int_0^1 |u_{n,l}(r)|^2 dr = a \int_0^1 \frac{|u_{n,l}(z)|^2}{z(1-z)} dz = 1 \quad (3.21)$$

IV. Radial Şredinger tənliyinin asimptotik iterasiya metodu ilə həlli

(2.17) tənliyinə asimptotik iterasiya metodunu tətbiq edərək normallaşmış dalğa funksiyasını aşağıdakı kimi axtaraq:

$$u(z) = z^\zeta (1-z)^\eta \chi(z) \quad (4.1)$$

Qeyd edək ki, radial $u(z)$ dalğa funksiyasının sonluluq şərtindən $u(0) = u(1) = 0$ olduğundan $\zeta > 0$, $\eta > 0$ alınır. (4.1) ifadəsini (2.17) tənliyində yerinə yazsaq, alırıq:

$$\chi''(z) + \frac{2\zeta + 1 - 2(\zeta + \eta + 1)z}{z(1-z)} \chi'(z) + \frac{\zeta^2 - \varepsilon^2 + [\beta^2 - (2\zeta + 1)(\zeta + \eta)]z + [(\zeta + \eta)^2 + \zeta + \eta - \gamma^2]z^2}{z^2(1-z)^2} \chi(z) = 0.$$

ζ və η parametrlərini elə seçək ki, yuxarıdakı tənlik sadələşsin. Ona görə də ζ və η parametrlərini $\zeta^2 - \varepsilon^2 = 0$ və $\beta^2 - (2\zeta + 1)(\zeta + \eta) = -[(\zeta + \eta)^2 + \zeta + \eta - \gamma^2]$ şəklində götürsək, $\zeta > 0$, $\eta > 0$ şərtində $\zeta = \varepsilon > 0$, $\eta = \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} > 0$ olar. Onda alırıq:

$$\chi''(z) + \frac{2\varepsilon + 1 - 2(\varepsilon + \eta + 1)z}{z(1-z)} \chi'(z) - \frac{(\varepsilon + \eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2}{z(1-z)} \chi(z) = 0 \quad (4.2)$$

(4.2) və (B.1) tənliklərinin müqayisəsindən $\lambda_0(z)$ və $s_0(z)$ funksiyaları üçün alırıq:

$$\lambda_0(z) = \frac{2(\varepsilon + \eta + 1)z - 2\varepsilon - 1}{z(1-z)}, \quad s_0(z) = \frac{(\varepsilon + \eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2}{(z(1-z))^2} \quad (4.3)$$

(4.3) münasibətləri ilə verilən funksiyalardan istifadə edərək (B.7) rekurrent düsturlarına əsasən $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$, $s_1(z)$, $s_2(z)$ funksiyaları üçün tapırıq:

$$\lambda_1(z) = \lambda_0'(z) + s_0(z) + \lambda_0^2(z) = z^{-2}(1-z)^{-2} \{ 2(\varepsilon+1)(2\varepsilon+1) + [(\varepsilon+\eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2 - 2(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+2\eta+3)]z + [3(\varepsilon+\eta)^2 + 9(\varepsilon+\eta) + \gamma^2 + 6]z^2 \},$$

$$s_1(z) = s_0'(z) + s_0(z)\lambda_0(z) = \frac{2[(\varepsilon+\eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2][(\varepsilon+\eta+2)z - (\varepsilon+1)]}{z^2(1-z)^2}$$

$$\lambda_2(z) = \lambda_1'(z) + s_1(z) + \lambda_0(z)\lambda_1(z) = z^{-3}(1-z)^{-3} \{ -2(\varepsilon+1)(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+3) + [-4(\varepsilon+1)(\varepsilon+\eta)^2 + 8(\varepsilon+1)(3\varepsilon+1)(\varepsilon+\eta) + 4(\varepsilon+1)\gamma^2 + 24(\varepsilon+1)(2\varepsilon+1)]z + [4(\varepsilon+\eta)^3 - (20\varepsilon-4)(\varepsilon+\eta)^2 - 2(40\varepsilon+2\gamma^2+15)(\varepsilon+\eta) - 4(\varepsilon+3)\gamma^2 - 36(2\varepsilon+1)]z^2 + [4(\varepsilon+\eta)^3 + 24(\varepsilon+\eta)^2 + 4(\gamma^2+11)(\varepsilon+\eta) + 8(\gamma^2+3)]z^3 \}$$

$$s_2(z) = s_1'(z) + s_0(z)\lambda_1(z) = z^{-3}(1-z)^{-3} [(\varepsilon+\eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2] \{ 2(\varepsilon+1)(2\varepsilon+3) + [(\varepsilon+\eta)^2 - (\varepsilon+\eta) - \gamma^2 - 4(2\varepsilon+3) - 2(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+2\eta+3)]z + [3(\varepsilon+\eta)^2 + 15(\varepsilon+\eta) + \gamma^2 + 18]z^2 \}$$

Bu funksiyaların ifadələrini kvantlanma şərtlərində [23-25, 29]

$$\delta_k(x) = \begin{vmatrix} \lambda_k(x) & s_k(x) \\ \lambda_{k-1}(x) & s_{k-1}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

yerinə yazsaq, alarıq:

$$\delta_1(z) = \lambda_1(z)s_0(z) - \lambda_0(z)s_1(z) = \frac{[(\varepsilon+\eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2][(\varepsilon+\eta+1)^2 + \varepsilon + \eta + 1 - \gamma^2]}{z^2(1-z)^2} \quad (4.5)$$

$$\delta_2(z) = \lambda_2(z)s_1(z) - \lambda_1(z)s_2(z) = - \frac{[(\varepsilon+\eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2][(\varepsilon+\eta+1)^2 + \varepsilon + \eta + 1 - \gamma^2][(\varepsilon+\eta+2)^2 + \varepsilon + \eta + 2 - \gamma^2]}{z^3(1-z)^3}$$

$$\delta_k(z) = \lambda_k(z)s_{k-1}(z) - \lambda_{k-1}(z)s_k(z) = \frac{(-1)^{k+1} \prod_{i=0}^k [(\varepsilon+\eta+i)^2 + \varepsilon + \eta + i - \gamma^2]}{z^{k+1}(1-z)^{k+1}}$$

(4.5) münasibətlərindən

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 + \eta_0 &= \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 1}{2} \\ \varepsilon_1 + \eta_1 &= \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 3}{2} \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_k + \eta_k &= \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 2k - 1}{2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

və ya $\eta = \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}$ olduğundan ümumi halda alarıq:

$$\varepsilon_{n_r} + \sqrt{\varepsilon_{n_r}^2 - \beta^2 + \gamma^2} = \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 2n_r - 1}{2}. \quad (4.7)$$

burada n_r - radial kvant ədədidir. Beləliklə, (4.7) ifadəsindən ε_n üçün taparıq:

$$\varepsilon_{n_r} = \frac{1}{2} \left(n' + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{n'} \right) \quad (4.8)$$

burada $n' = -n_r + \frac{\sqrt{1+4\gamma^2} - 1}{2}$ - dir.

(2.16) münasibətləri əsasında (4.8) ifadəsindən və $\zeta = \varepsilon > 0$, $\eta = \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} > 0$ bərabərsizliklərindən, Nikiforov-Uvarov metodunun köməyi ilə tapılmış l - halında (3.16) enerjinin məxsusi qiyməti və (3.12) - (3.14) bərabərsizlikləri ilə üst-üstə düşən ifadələr alınır.

(4.2) və (B.15) tənliklərinin müqayisəsindən alırıq:

$$t = \frac{2\eta + 1}{2}, b = 1, N = -1, m = \frac{2\varepsilon - 1}{2}, w = (\varepsilon + \eta)^2 + \varepsilon + \eta - \gamma^2. \quad (4.11)$$

(4.11) ifadələrini (B.17) münasibətlərində yerinə yazsaq, σ və ρ üçün tapırıq:

$$\sigma = 2\varepsilon + 1, \rho = 2\varepsilon + 2\eta + 1 \quad (4.12)$$

(4.11) və (4.12) ifadələrini (B.16) münasibətində nəzərə alaraq ixtiyari l halında $\chi_{n_r, l}(z)$ funksiyası

$$\chi_{n_r, l}(z) = (-1)^{n_r} C \frac{\Gamma(2\varepsilon + n_r + 1)}{\Gamma(2\varepsilon + 1)} {}_2F_1(-n_r, 2\varepsilon + 2\eta + 1 + n_r; 2\varepsilon + 1; z), \quad (4.13)$$

olar, burada ${}_2F_1(-n_r, 2\varepsilon + 2\eta + 1 + n_r; 2\varepsilon + 1; z)$ - Qausun hiperhəndəsi funksiyasıdır və C müəyyən sabitdir. $C = \frac{(-1)^{n_r}}{n_r!}$ götürsək [29], onda (4.13) ifadəsi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\chi_{n_r, l}(z) = \frac{\Gamma(2\varepsilon + n_r + 1)}{n_r! \Gamma(2\varepsilon + 1)} {}_2F_1(-n_r, 2\varepsilon + 2\eta + 1 + n_r; 2\varepsilon + 1; z) = P_{n_r}^{(2\varepsilon, 2\eta)}(1 - 2z)$$

və nəticədə radial dalğa funksiyası üçün tapırıq:

$$u_{n_r, l}(z) = C_{n_r, l} z^\varepsilon (1 - z)^\eta P_{n_r}^{(2\varepsilon, 2\eta)}(1 - 2z). \quad (4.14)$$

Radial Şredinger tənliyi üçün AİM ilə alınan (4.14) həlli NU metodu ilə tapılmış (3.20) həllinin eynidir, burada $\eta = \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}$. Qeyd edək ki, $\zeta > 0$, $\eta > 0$ bərabərsizliklərindən NU metodu ilə V_0 və n_r üçün müəyyən olunmuş şərtlərin eynisi, yəni (3.12) və (3.14) bərabərsizlikləri alınır.

V. Hesablamaların nəticəsi və müzakirəsi

$l=0$ olduqda (3.16) münasibətinə əsasən enerjinin məxsusi qiymətləri üçün alırıq:

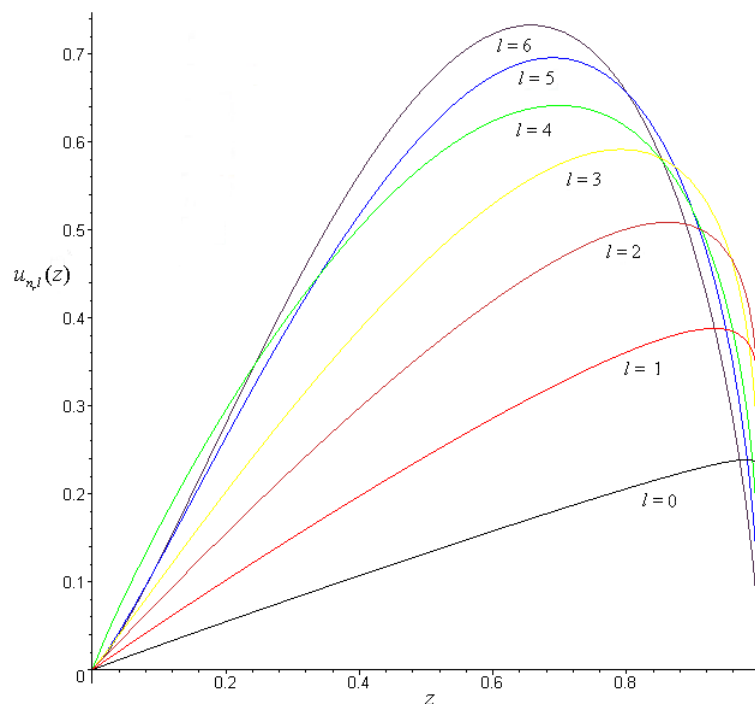
$$E_{n_r} = -\frac{V_0}{2} - \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[\frac{1}{16} \left(\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W_0}{\hbar^2}} - 2n_r - 1 \right)^2 + \frac{\left(\frac{2\mu a^2 V_0}{\hbar^2} \right)^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W_0}{\hbar^2}} - 2n_r - 1 \right)^2} \right] \quad (3.1)$$

Qeyd edək ki, (3.1) ifadəsi [16] - dəki enerjinin məxsusi qiymətlərinin ifadəsi ilə üst-üstə düşür. Perey və başqaları [30] tərəfindən tapılmış təcrübi nəticələrə $r_0 = 1.285 \text{ fm}$, $a = 0.65 \text{ fm}$ əsasən Vud-Sakson potensialının dərinliyi V_0 parametri $V_0 = (40.5 + 0.13A) \text{ MeV} = 47.78 \text{ MeV}$ və hədəf ^{56}Fe nüvəsinin radiusu $R_0 = r_0 A^{\frac{1}{3}} = 4.9162 \text{ fm}$ kimi hesablanır, burada A nüvəsinin atom kütlə ədədidir. ^{56}Fe atom nüvəsindən $m_A = 56 u$ və neytrondən $m_n = 1.00866 u$ ibarət sistemin gətirilmiş

kütləsi $\mu = \frac{m_A \cdot m_n}{m_A + m_n} = 0.990814 u$ olar. Cədvəl 1-də radial n_r və orbital l kvant ədədlərinin,

potensialın W dərinliyinin müxtəlif qiymətlərində $V_0 = 47.78 \text{ MeV}$, $R_0 = 4.9162 \text{ fm}$, $a = 0.65 \text{ fm}$ olduqda ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialın r_{\min} minimum nöqtəsi, bu minimum nöqtəsində effektiv potensialın V_{eff} qiyməti, əlaqəli halların enerjisi və ona uyğun normalaşmış dalğa funksiyaları verilmişdir.

Şəkil 1. Orbital l kvant ədədinin müxtəlif qiymətləri üçün normalaşmış $u_{n,l}(z)$ dalğa funksiyasının z -dən asılılığı



Cədvəl 1. – dən görünür ki, $W = 100 \text{ MeV}$ və $W = 200 \text{ MeV}$ olduqda orbital kvant ədədini uyğun olaraq $0 \leq l \leq 5$ və $0 \leq l \leq 6$ qiymətlərində əlaqəli hallar vardır, amma $l \geq 6$ və $l \geq 7$ qiymətlərində isə əlaqəli hallar yoxdur. Eləcə də ixtiyari l üçün $n_r \geq 1$ olduqda əlaqəli hallar mövcud deyildir. Orbital l kvant ədədi arıqca əlaqəli halların $E_{n,l}$ enerjisi də artır. Bu onunla bağlıdır ki, $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialı hesabına sistemdə əlavə itələmə qüvvəsi meydana çıxır. Ona görə də bu potensialı kompensasiya etmək üçün əlaqəli halların enerjisi artmalıdır [6, 8, 9]. Belə ki, əlaqəli halların enerjisinin artması məsələn, $V_0 = 47.78 \text{ MeV}$, $R_0 = 4.9162 \text{ fm}$, $a = 0.65 \text{ fm}$, $n_r = 0$, $W = 100 \text{ MeV}$ olduqda orbital l kvant ədədi böyüdükcə normalaşmış dalğa funksiyalarının şəkil 1-də verilmiş qrafiki təsvirlərinin simmetrik forma almasında özünü göstərir.

VI. Nəticə

Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı sahəsində ixtiyari l üçün mərkəzəqaçma potensialına təkmilləşmiş yaxınlaşma sxeminin köməyilə Şredinger tənliyinin əlaqəli hallarının enerjisinin məxsusi qiymətləri və uyğun məxsusi funksiyaların analitik ifadələri tapılmışdır. Hər iki – Nikiforov–Uvarov və asimptotik iterasiya metodların köməyilə enerjinin məxsusi qiymətləri üçün eyni ifadələr alınmış və radial dalğa funksiyalarının ifadələrinin bir-birinə keçməsi göstərilmişdir. Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün enerjinin məxsusi qiyməti V_0, W_0, R_0, a parametrlərindən asılı olub məhdud enerji səviyyələrinə malikdir, yəni kvant mexanikası çərçivəsində əlaqəli halların tapılması zamanı potensial parametrlərin üzərinə bir sıra məhdudiyətlər qoyulur. Enerjinin məxsusi qiymətləri orbital l kvant ədədindən asılı $V_{eff} < E_{n,l} < V_l$ bərabərsizliyini ödəyir. Qeyd edək ki, hər iki metodla n_r və V_0 üçün eyni bir məhdudiyət şərtləri alınır. Müxtəlif potensial sahələr üçün enerji spektri praktiki maraq kəsb etdiyindən ixtiyari parametrlərə nəzərən enerjinin məxsusi qiymətlərinin xassələrinin öyrənilməsi çox vacib və aktualdır. Illüstrasiya məqsədilə l və n_r kvant ədədlərinin müəyyən qiymətləri üçün ^{56}Fe nüvəsinin əlaqəli halların enerjisinin qiymətləri hesablanmış və onların təhlili aparılmışdır.

Cədvəl 1. Radial n_r və orbital l kvant ədədlərinin, potensialın W dərinliyinin müxtəlif qiymətlərində əlaqəli halların enerjisi və ona uyğun normalaşmış dalğa funksiyaları

n_r	l	W, MeV	r_{min}, fm	V_{eff}, MeV	$E_{n_r, l}, MeV$	V_l, MeV	$u_{n_r, l}(z)$
0	0	50	2.455811766	-47.80464202	-58.55077686	-47.8	$1.7220230680 z^{1.0819999428} (1-z)^{0.6860707160}$
0	1	50	2.455811766	-40.79749024	-33.815134	-33.58538850	$0.5819825423 z^{11.36325868} (1-z)^{0.0877772917}$
0	2	50	2.455811766	-47.80464202	-7.46769	-5.19616549	$1.877833720 z^{19.68412022} (1-z)^{0.2121176496}$
0	3	50	2.455811766	-47.80464202	24.60711	37.38766901	əlaqəli hal yoxdur
0	0	100	4.240031608	-54.59732103	-47.80412133	-47.8	$0.265429088 z^{0.9770726432} (1-z)^{0.0219661475}$
0	1	100	4.240031608	-52.24664116	-44.10044208	-43.83500622	$0.506143443 z^{0.9862584722} (1-z)^{0.0728518256}$
1	1	100	4.240031608	-52.24664116	-33.61266693	-43.83500622	əlaqəli hal yoxdur
0	2	100	4.240031608	-47.54528142	-37.26729879	-35.94501867	$0.8156347189 z^{3.008916222} (1-z)^{0.1626007102}$
1	2	100	4.240031608	-47.54528142	-429.1546502	-35.94501867	əlaqəli hal yoxdur
0	3	100	4.240031608	-40.49324182	-27.93239468	-24.1100373	$1.16682418 z^{1.050720152} (1-z)^{0.2766582078}$
1	3	100	4.240031608	-40.49324182	-123.0701748	-24.1100373	əlaqəli hal yoxdur
0	4	100	4.240031608	-31.09052234	-16.46401658	-8.33006225	$1.455628707 z^{0.8282552768} (1-z)^{0.4022865258}$
1	4	100	4.240031608	-31.09052234	-39.07468690	-8.33006225	əlaqəli hal yoxdur
0	5	100	4.240031608	-19.33712300	-3.00613603	11.39490663	$2.03145770 z^{1.192259909} (1-z)^{0.5268086564}$
1	5	100	4.240031608	-19.33712300	2.83638509	11.39490663	əlaqəli hal yoxdur
0	6	100	4.240031608	-5.23304379	12.40489010	35.06486928	əlaqəli hal yoxdur
0	0	150	4.487181855	-65.19488064	-51.82930940	-47.8	$1.178654975 z^{1.018001496} (1-z)^{0.2865651484}$
0	1	150	4.487181855	-63.09601647	-49.14569236	-44.23197829	$1.25861013 z^{1.014093688} (1-z)^{0.2126081022}$
0	20	150	4.487181855	-58.89828812	-43.93596655	-37.13593488	$1.40829182 z^{1.007798269} (1-z)^{0.2687262562}$
0	3	150	4.487181855	-52.60169560	-36.44775283	-26.49186976	$1.61292121 z^{1.001538892} (1-z)^{0.6681702388}$
0	4	150	4.487181855	-44.20623890	-26.93234868	-12.29978294	$1.76166812 z^{0.9015681102} (1-z)^{0.5609049280}$
0	5	150	4.487181855	-33.71191804	-15.58684515	5.44032559	$2.13897665 z^{0.9987128261} (1-z)^{0.6486121212}$
1	5	150	4.487181855	-33.71191804	4.69335311	5.44032559	əlaqəli hal yoxdur
0	6	150	4.487181855	-21.11873299	-2.53750159	26.72845583	$2.19724818 z^{0.8581990927} (1-z)^{0.7649489927}$
1	6	150	4.487181855	-21.11873299	26.13525445	26.72845583	əlaqəli hal yoxdur
0	7	150	4.487181855	-6.42668378	12.14966860	51.56460777	əlaqəli hal yoxdur
0	0	200	4.599510648	-76.74366047	-59.04960487	-47.8	$1.75596346 z^{1.086598752} (1-z)^{0.4768954280}$
1	0	200	4.599510648	-76.74366047	-64.04871484	-47.8	əlaqəli hal yoxdur
0	1	200	4.599510648	-74.74606098	-56.21001797	-44.38328719	$1.79310089 z^{1.091662117} (1-z)^{0.4882874678}$
1	1	200	4.599510648	-74.74606098	-56.94732674	-44.38328719	əlaqəli hal yoxdur
0	2	200	4.599510648	-70.7508619	-50.61117817	-37.58986157	$1.87101763 z^{1.101800280} (1-z)^{0.510286091}$
1	2	200	4.599510648	-70.7508619	-44.16267043	-37.58986157	əlaqəli hal yoxdur
0	3	200	4.599510648	-64.75806351	-42.39278162	-27.39972313	$1.99548047 z^{1.118762012} (1-z)^{0.5675272850}$
1	3	200	4.599510648	-64.75806351	-27.72415839	-27.39972313	əlaqəli hal yoxdur
0	4	200	4.599510648	-56.76766554	-31.72137742	-13.81287189	$2.03299541 z^{1.018948456} (1-z)^{0.5983982256}$
1	4	200	4.599510648	-56.76766554	-9.36267859	-13.81287189	əlaqəli hal yoxdur
0	5	200	4.599510648	-46.77966808	-18.75894891	3.17069217	$2.40865268 z^{1.176882622} (1-z)^{0.6621806199}$
1	5	200	4.599510648	-46.77966808	9.92379481	3.17069217	əlaqəli hal yoxdur
0	6	200	4.599510648	-34.79407112	-3.64144188	23.55096903	$2.70980343 z^{1.219229800} (1-z)^{0.7373684670}$
1	6	200	4.599510648	-34.79407112	29.8165624	23.55096903	əlaqəli hal yoxdur
0	7	200	4.599510648	-20.81087467	0.07999278	47.32795871	əlaqəli hal yoxdur

Əlavə A. Nikiforov-Uvarov metodu

Nikiforov-Uvarov metodu xüsusi ortoqonal funksiyalı II tərtib ümumi xətti tənliklərin həlli-nə əsaslanır. O qeyri-relyativistik Şredinger tənliyinin və Şredinger tənliyinə oxşar tənliklərin həllində geniş istifadə olunur. Bir ölçülü Şredinger tənliyi və ya II tərtib adi differensial tənliklər NU metodundan istifadə edilərək aşağıdakı şəkildə yazıla bilər [20]:

$$\psi''(z) + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}\psi'(z) + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}\psi(z) = 0, \quad (\text{A.1})$$

burada $\sigma(z)$ və $\tilde{\sigma}(z)$ əsasən ikinci dərəcədən böyük olmayan çoxhədlilər, $\tilde{\tau}(z)$ birinci dərəcədən böyük olmayan çoxhədlidir.

(A.1) tənliyində

$$\psi(z) = \Phi(z)y(z) \quad (\text{A.2})$$

əvəzləməsini aparsaq,

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \quad (\text{A.3})$$

şəkilli hiperhəndəsi tənliyi alırıq. $\Phi(z)$ funksiyası

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)}, \quad (\text{A.4})$$

loqarifmik törəmə kimi təyin olunur [20], burada $\pi(z)$ birinci dərəcədən böyük olmayan çoxhədlidir.

$\psi(z)$ funksiyasının digər hissəsi $y(z)$ hiperhəndəsi tip funksiyadır ki, bu da qeyd olunmuş n -lər üçün

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\sigma^n(z)\rho(z)] \quad (\text{A.5})$$

Rodriges münasibəti ilə verilir, burada B_n - normallaşma sabitidir, $\rho(z)$ -çəki funksiyasıdır. Çəki funksiyası

$$\frac{d}{dz}(\sigma(z)\rho(z)) = \tau(z)\rho(z) \quad (\text{A.6})$$

Pirson diferensial tənliyini inteqrallamaqla hesablanır [20], burada $\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z)$ -dir.

Klassik ortoqonal polinomlarda $\rho(z)$ - funksiyasının Pirson diferensial tənliyini ödənməsi üçün $\tau(z)$ çoxhədlisi (a, b) intervalının bəzi nöqtələrində sıfır bərabər olması zəruridir və bu intervalda $\sigma(z) > 0$ üçün $\tau(z)$ çoxhədlisinin törəməsi mənfi olmalıdır, yəni $\tau'(z) < 0$. Bu metod üçün zəruri olan $\pi(z)$ funksiyası və λ parametri aşağıdakı şəkildə təyin olunur [20]:

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}, \quad (\text{A.7})$$

$$\lambda = k + \pi'(z). \quad (\text{A.8})$$

Digər tərəfdən, k -nin qiymətini tapmaq üçün kvadrat kökün altındakı ifadə müəyyən çoxhədlinin kvadratı olmalıdır. Bu o zaman mümkündür ki, onun diskriminantı sıfır olsun. Beləliklə, Şredinger tənliyi üçün enerjinin məxsusi qiymət tənliyi [20]

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{A.9})$$

(A.8) və (A.9) müqayisəsindən enerjinin məxsusi qiyməti tapılır.

Əlavə B. Asimptotik iterasiya metodu

Asimptotik iterasiya metodunu aşağıdakı şəkildə olan ikinci tərtib xətti bircins adi differensial tənliyin həllinə tətbiq edək:

$$y''(x) = \lambda_0(x)y'(x) + s_0(x)y(x), \quad (\text{B.1})$$

burada $\lambda_0(x) \neq 0$, ştrix x -ə görə törəməni ifadə edir. $s_0(x)$ və $\lambda_0(x)$ funksiyaları kifayət qədər diferensiallanan funksiyalardır. Bu tənliyin ümumi həllini tapmaq üçün (B.1) tənliyindən x -ə görə törəmə alaıq:

$$y'''(x) = \lambda_1(x)y'(x) + s_1(x)y(x) \quad (\text{B.2})$$

burada

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \lambda_0'(x) + s_0(x) + \lambda_0^2(x) \\ s_1(x) &= s_0'(x) + s_0(x)\lambda_0(x) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

və (B.2) tənliyindən x -ə görə törəmə alsaq, taparıq:

$$y''''(x) = \lambda_2(x)y'(x) + s_2(x)y(x) \quad (\text{B.4})$$

burada

$$\begin{aligned} \lambda_2(x) &= \lambda_1'(x) + s_1(x) + \lambda_0(x)\lambda_1(x) \\ s_2(x) &= s_1'(x) + s_0(x)\lambda_1(x) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Beləliklə, (B.1) tənliyindən $(k+1)$ və $(k+2)$ tərtib törəmə alsaq ($k = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} y^{(k+1)}(x) &= \lambda_{k-1}(x)y'(x) + s_{k-1}(x)y(x) \\ y^{(k+2)}(x) &= \lambda_k(x)y'(x) + s_k(x)y(x) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

olar, burada

$$\begin{aligned} \lambda_k(x) &= \lambda_{k-1}'(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{k-1}(x) \\ s_k(x) &= s_{k-1}'(x) + s_0(x)\lambda_{k-1}(x) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$(k+2)$ və $(k+1)$ tərtib törəmələrin nisbətindən taparıq:

$$\frac{d}{dx} \ln[y^{(k+1)}(x)] = \frac{y^{(k+2)}(x)}{y^{(k+1)}(x)} = \frac{\lambda_k(x)y'(x) + s_k(x)y(x)}{\lambda_{k-1}(x)y'(x) + s_{k-1}(x)y(x)} = \frac{\lambda_k(x) \left[y'(x) + \frac{s_k(x)}{\lambda_k(x)} y(x) \right]}{\lambda_{k-1}(x) \left[y'(x) + \frac{s_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} y(x) \right]} \quad (\text{B.8})$$

Əgər $k > 0$ olarsa, k -nın kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$\delta_k(x) = \begin{vmatrix} \lambda_k(x) & s_k(x) \\ \lambda_{k-1}(x) & s_{k-1}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.9})$$

kvantlanma şərtində $\alpha(x)$ üçün alırıq:

$$\frac{s_k(x)}{\lambda_k(x)} = \frac{s_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} = \alpha(x) \quad (\text{B.10})$$

(B.10) ifadəsini (B.8) münasibətində nəzərə alıb və nəticədə $\lambda_k(x)$ funksiyaları üçün alırıq:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln[y^{(k+1)}(x)] &= \frac{\lambda_k(x)}{\lambda_{k-1}(x)} = \frac{\lambda_{k-1}'(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} = \frac{\lambda_{k-1}'(x)}{\lambda_{k-1}(x)} + \frac{s_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} + \lambda_0(x) = \\ &= \frac{d}{dx} \ln[\lambda_{k-1}(x)] + \alpha(x) + \lambda_0(x) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Beləliklə, (B.1) tənliyinin ümumi həlli üçün tapırıq:

$$y^{(k+1)}(x) = C_1 \lambda_{k-1}(x) \exp\left(\int [\alpha(x) + \lambda_0(x)] dx\right) \quad (\text{B.12})$$

burada C_1 inteqrallama sabitidir. (B.12) –ni (B.6)-da yerinə yazsaq, birinci tərtib adi diferensial tənlik alırız:

$$\begin{aligned} \lambda_{k-1}(x)y'(x) + s_{k-1}(x)y(x) &= C_1 \lambda_{k-1}(x) \exp\left(\int [\alpha(x) + \lambda_0(x)] dx\right) \\ y'(x) + \alpha(x)y(x) &= C_1 \exp\left(\int [\alpha(x) + \lambda_0(x)] dx\right) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Nəticədə (B.13) tənliyinin ümumi həllini tapılır:

$$y(x) = \exp\left(-\int \alpha(x) dx\right) \left\{ C_2 + C_1 \int \exp\left(\int [\lambda_0(x) + 2\alpha(x)] dx\right) dx \right\} \quad (\text{B.14})$$

AİM –də əsas ideya verilmiş potensial üçün radial Şredinger tənliyini (B.1) tənliyi şəklinə salmaqdır. Sonra $\lambda_0(x)$ və $s_0(x)$ funksiyalarını təyin edib, (B.7) rekurent münasibətlərindən istifadə edərək $s_k(x)$ və $\lambda_k(x)$ parametrlərini hesablamaqdır. Əgər qoyulmuş məsələ dəqiq həll olunandırsa, (B.10) kvantlanma şərtindən istifadə edərək enerjinin məxsusi qiyməti tapılır.

Fərz edək ki, ümumi şəkli

$$y''(x) = 2 \left(\frac{tx^{N+1}}{1-bx^{N+2}} - \frac{m+1}{x} \right) y'(x) - \frac{wx^N}{1-bx^{N+2}} y(x) \quad (\text{B.15})$$

ikinci tərtib xətti birincis adi diferensial tənlik kimi olan radial Şredinger tənliyini həll etmək lazımdır, burada t , m və w ixtiyarı sabitlərdir. (B.15) tənliyin dəqiq həlli aşağıdakı kimidir:

$$y_n(x) = (-1)^n C(N+2)^n (\sigma)_n {}_2F_1(-n, \rho+n; \sigma; bx^{N+2}). \quad (\text{B.16})$$

Burada aşağıdakı işarələmələrdən istifadə olunmuşdur:

$$(\sigma)_n = \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(\sigma)}, \quad \sigma = \frac{2m+N+3}{N+2}, \quad \rho = \frac{(2m+1)b+2t}{(N+2)b}. \quad (\text{B.17})$$

ƏDƏBİYYAT

1. R.D. Woods and D.S. Saxon, *Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering*, Physical Review, Vol. 95, No. 2, p. 577-578, 1954.
2. A. Bohr and B. Mottelson, *Nuclear Structure*, World Scientific, Singapore, 1998.
3. C. Berkdemir, A. Berkdemir and R. Sever, *Polynomial solutions of the Schrödinger equation for the generalized Woods-Saxon potential*, Physical Review C, Vol. 72, No. 2, p. 027001-1/4, 2005.
4. B Gönül and K Köksal, *Solutions for a generalized Woods-Saxon potential*, Physica Scripta, Vol. 76, No. 5, p. 565-570, 2007.
5. O. Bayrak and E. Aciksoz, *Corrected analytical solution of the generalized Woods-Saxon potential for arbitrary states*, Physica Scripta, Vol. 90, No. 1, p. 015302-1/5, 2015.
6. S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, Vol. 1, 1994.
7. N. Rosen and P.M. Morse, *On the vibrations of polyatomic molecules*, Physical Review, Vol. 42, No. 2, p. 210-217, 1932.
8. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, London, 1958.
9. W. Greiner, *Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, 2001.
10. A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhäuser, Basel, 1988.
11. F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Supersymmetry and quantum mechanics*, Physics Reports, Vol. 251, No. 5-6, p. 267-385, 1995.
12. H. Çiftçi, R.L. Hall and N. Saad, *Asymptotic iteration method for eigenvalue problems*, Journal of Physics A: Mathematical General, Vol. 36, No.47, p. 11807-11816, 2003.

13. H. Çiftçi, R.L. Hall and N. Saad, *Construction of exact solutions to eigenvalue problems by the asymptotic iteration method*, Journal of Physics A: Mathematical General, Vol. 38, No. 5, p. 1147-1155, 2005.
14. H. Çiftçi, R.L. Hall and N. Saad, *Perturbation theory in a framework of iteration methods*, Physics Letters A, Vol. 340, No. 5-6, p. 388-396, 2005.
15. O. Bayrak, I. Boztosun and H. Çiftçi., *Exact analytical solutions to the Kratzer potential by the asymptotic iteration method*, International Journal of Quantum Chemistry, Vol. 107, No. 3, p. 540-544, 2007.
16. Editorial Note: *Polynomial solutions of the Schrödinger equation for the generalized Woods-Saxon potential* [C. Berkdemir, A. Berkdemir and R. Sever, Physical Review C, Vol. 72, No. 2, p. 027001-1/027001-4, 2005; Physical Review C, Vol. 74, No. 3, 039902(E), 2006].
17. S.M.Ikhdaïr and R.Sever, *Exact solution of the Klein–Gordon equation for the PT-Symmetric generalized Woods-Saxon potential by the Nikiforov-Uvarov method*, Annalen der Physik - Leipzig, Vol. 16, No 3, p. 218-232, 2007.
18. A.Arda and R.Sever, *Approximate l -state solutions of a spin-0 particle for Woods-Saxon potential*, International Journal of Modern Physics C, Vol. 20, No. 4, p. 651-665, 2009.
19. A.Arda and R.Sever, *Approximate l-state solutions to the Klein-Gordon equation for modified Woods-Saxon potential with position dependent mass*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 24, No. 20&21, p. 3985-3994, 2009.
20. C.L. Pekeris, *The rotation-vibration coupling in diatomic molecules*, Physical Review, Vol. 45, No. 2, p. 98-103, 1934.
21. R.L. Greene and C. Aldrich, *Variational wave functions for a screened Coulomb potential*, Physical Review A, Vol. 14, No. 6, p. 2363-2366, 1976.
22. V.H. Badalov, H.I. Ahmadov and S.V. Badalov, *Analytical solutions of the Klein –Gordon equation with the Woods-Saxon potential for arbitrary l -state*, News of Baku University, No. 2, p. 157-165, 2008.
23. V. H. Badalov, H. I. Ahmadov and A. I. Ahmadov, *Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Woods-Saxon potentials for arbitrary l -state*, International Journal of Modern Physics E, Vol. 18, No. 3, p. 631-641, 2009.
24. V.H. Badalov, H.I. Ahmadov and S.V. Badalov, *Any l -state analytical solutions of the Klein –Gordon equation for the Woods-Saxon potential*, International Journal of Modern Physics E, Vol. 19, No. 7, p. 1463-1475, 2010.
25. V.H. Bədəlov, *Vud-Sakson potensialı üçün D -ölçülü Şredinger tənliyinin əlaqəli halları*, Journal of Qafqaz University, Vol. 2, No. 2, p.178-191, 2014.
26. V.H. Badalov, *The bound state solutions of the D - dimensional Schrödinger equation for the Woods - Saxon potential*, International Journal of Modern Physics E, Vol. 25, No. 1, p. 1650002-1/24, 2016.
27. J.N. Ginocchio, *Relativistic symmetries in nuclei and hadrons*, Physics Reports, Vol. 414, No. 4-5, p. 165-261, 2005.
28. H. Liang, J. Meng, S.-G. Zhou, *Hidden pseudospin and spin symmetries and their origins in atomic nuclei*, Physics Reports, Vol. 570, p. 1-84, 2015.
29. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental functions*, McGraw-Hill, New York, Vol. 2. 1953.
30. C. M. Perey, F. G. Perey, J. K. Dickens and R. J. Silva, *11–MeV proton optical-model analysis*, Physical Review, Vol. 175, No. 4, p. 1460-1475, 1968.

UOT 541.8PACS: 77.22.Ej, 64.75 Bc, 31.70. Dk, 61.70 Og

DETERMINATION OF SIZES OF MACROMOLECULES OF POLYETHYLENE GLYCOL IN WATER SOLUTIONS BY VISCOSIMETRY METHOD

E.A. MASIMOV, H.Sh. HASANOV, B.G. PASHAYEV

Baku State University

Baku / AZERBAIJAN

p.g.bakhtiyar@gmail.com

ABSTRACT

The paper analyzes dependences of kinematic viscosity of water solutions of polyethylene glycols (PEG) of various molecular weights in the temperature range of 293.15-323.15 K and concentrations range of $1 \frac{g}{dl} - 5 \frac{g}{dl}$. The root-mean-square distance between the ends of the polymer chain is calculated from the values of the intrinsic viscosity in the θ -solvent. It has been established that the size of the macro-molecule polyethylene glycol depended on the molecular mass and temperature of polyethylene glycol. Exactly, the size of the macro-molecules of the polyethylene glycol was increasing with increase of the molecular mass of the polymer and decreasing with increase of the temperature. Furthermore, in water solutions of the polyethylene glycol (PEG) it was possible to measure the length of water solvent of Kuhn segment at different temperatures. Comparison of the lengths of Kuhn segment indicated that polyethylene glycols can be thought of as they are polar polymers.

Key words: water solutions, polyethylene glycol, intrinsic viscosity, swelling.

SULU MƏHLULLARDA POLİMER MAKROMOLEKULUNUN ÖLÇÜLƏRİNİN REOLOJİ METODLARLA TƏYİNİ XÜLASƏ

İşdə molekul kütlələri 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 olan polietilenqlikolun sulu məhlullarının 293,15-323,15 K temperatur və $1 - 5 \frac{g}{dl}$ konsentrasiya intervalında kinematik özlülüüyü tədqiq edilmişdir. Kinematik özlülüüyün təcrübi qiymətlərinə əsasən baxılan molekul kütləli polietilenqlikolların sulu məhlullarının tədqiq olunan temperatur intervalında xarakteristik özlülüüyü, θ -həllədicidə xarakteristik özlülüüyü, polietilenqlikol makromolekulunun yu- mağının şişmə dərəcəsi, polietilenqlikol zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə hesablanmışdır. Müəyyən edilmişdir ki, polietilenqlikol makromolekulunun ölçüsü polietilenqlikolun molekul kütləsindən və temperaturdan asılıdır. Belə ki, makromolekulun ölçüsü polimerin molekul kütləsinin artması ilə artır, temperaturun artması ilə azalır. Həmçinin, polietilenqlikolun sulu məhlulunda müxtəlif temperaturlarda Kun segmentinin uzunluğu təyin edilmişdir. Kun segmentinin uzunluğunun qiymətinin müqayisəsi onu göstərir ki, polietilenqlikolu mütəhərrik polimerlərə aid etmək olar.

Açar sözlər: sulu məhlul, polietilenqlikol, xarakteristik özlülük, orta kvadratik məsafə, şişmə.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ МАКРОМОЛЕКУЛ ПОЛИЭТИЛЕНГЛИКОЛЯ В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ МЕТОДОМ ВИСКОЗИМЕТРИЯ РЕЗЮМЕ

Исследованы зависимости кинематической вязкости водных растворов полиэтиленгликолей различной молекулярной массы в интервале температур 293,15 -323,15 К и концентраций $1 \frac{g}{dl} - 5 \frac{g}{dl}$. Среднеквадратичное расстояние между концами цепи полимера рассчитано по значениями характеристической вязкости в θ -растворителе. Было установлено, что размер макро-молекул полиэтиленгликоля зависит от молекулярной массы и температуры полиэтиленгликоля. Так размер макро-молекул полиэтиленгликоля увеличивается с увеличением молекулярной массы полимера и уменьшается с ростом температуры. Кроме того, в водных растворах полиэтиленгликоля была рассчитана длина сегмента Куна при различных температурах. Сравнение значений длин сегмента Куна показывает, что полиэтиленгликоли могут быть отнесены к гибким полимерам.

Ключевые слова: водные растворы, полиэтиленгликоль, характеристическая вязкость, набухания.

Giriş

Polyar qrupa malik olan polimerlər, məsələn, PEQ ($HO-(CH_2-CH_2-O)_n-H$), suda həll olduqda, PEQ molekulları ilə su molekulları arasında yaranan qarşılıqlı təsir hesabına həm suyun xassələri, ilk növbədə suyun strukturu, həm də polimer makromolekulunun konformasiyası və ölçüsü dəyişir. Təbiidir ki, məhlulun termodinamik xassələri əsasən polimer makromolekulunun xassələri ilə təyin olunur. Məhlulda makromolekulun struktur xarakteristikaları onun konformasiyası, zəncirin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə, hidratlaşması və s. ola bilər. Ədəbiyyatda müxtəlif fraksiyalı PEQ-in sulu məhlulunun tədqiqinə dair kifayət qədər işlər var [1-10]. Polimerin suda həll olması temperaturdan kəskin asılıdır. Belə ki, PEQ-in suda həll olmasının temperaturdan asılılığında həllolmanın yuxarı (HYKT) və aşağı (HAKT) kritik temperaturları müşahidə olunmuşdur [1, 2]. Tədqiqat işlərinin əksəriyyətində [1-3] PEQ-su sistemə baxılmışdır. Bir sıra işlərdə [4-6] PEQ-su-duz sistemlərinə də baxılmışdır. [4, 5] işlərində göstərilmişdir ki, PEQ-in sulu məhluluna KF , KCl , KBr duzlarını əlavə etdikdə molekulyar yumağın həcmi və θ -temperaturu azalır. Həm də duzların təsirinə görə $KBr < KCl < KF$ ardıcılığına malik olurlar. [6]-işində NaF , $NaCl$, NaI duzlarının təsirinə baxılmışdır. Bu işdə də duzlar təsirinə görə $NaI < NaCl < NaF$ ardıcılığına malik olurlar. Göstərilən işlərin müəllifləri aldıkları nəticələri kationların və anionların suya strukturlaşdırıcı təsiri ilə izah edirlər. [7,8] işlərində PEQ-su və PEQ-su-duz sistemlərində PEQ makromolekulunun konformasiyası və ölçüsü tədqiq edilmişdir. [9] işində PEQ-su və PEQ-su- KOH sistemlərində məhlulun özlü axınının aktivləşmə parametrlərinin PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı tədqiq edilmişdir. Göstərilmişdir ki, PEQ həm suya, həm də su- KOH sistemində strukturlaşdırıcı təsir göstərir. Həmin işin davamı olaraq, bu işdə məqsədimiz PEQ-in molekulyar kütləsinin, konsentrasiyasının və temperaturun PEQ makromolekulunun ölçüsünə təsirini araşdırmaq olmuşdur.

Nəzəri hissə

Tarazlıqda yerləşən, yəni həyacanlanmamış polimer makromolekulunun ölçüsünü təyin etmək üçün θ -həllədicidə xarakteristik özlülüyn qiymətindən istifadə olunur. Qeyd edək ki, θ -həllədicisi elə həllədiciyə deyilir ki, həmin həllədicidə polimerin həll olması zamanı yaranan məhlulda mümkün ola biləcək bütün qarşılıqlı təsirlər bir-birini kompensasiya etmiş olur. θ -həllədicidə termodinamik tarazlıq yaranır və polimer molekulu həyacanlanmamış halda olur. Təbiidir ki, belə həllədicini praktiki olaraq almaq üçün lazım olan şəraiti (təzyiq, temperatur və s.) seçmək olduqca çətindir. Nəzəriyyələr isə θ -həllədicidə qurulur [10]. Belə nəzəriyyələrdən biri də Flori nəzəriyyəsidir [10]. Flori nəzəriyyəsinə görə θ -həllədicidə xarakteristik özlülük ($[\eta]_\theta$) aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$[\eta]_\theta = \Phi_\theta \frac{(\bar{h}_\theta^2)^{3/2}}{M} = K_\theta M^{1/2} \quad (1)$$

Burada Φ_θ -Flori əmsalıdır, xarakteristik özlülük $\frac{dl}{dq}$ vahidləri ilə ölçüldükdə $\Phi_\theta = 2,1 \cdot 10^{23}$

qiymətinə malik olur, $(\bar{h}_\theta^2)^{1/2}$ -zəncirin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə, K_θ - θ -sabit, M -polimerin molekulyar kütləsidir.

(1) ifadəsindən görüldüyü kimi, $(\bar{h}_\theta^2)^{1/2}$ -ni təyin etmək üçün K_θ -ni və ya $[\eta]_\theta$ -ni tapmaq lazımdır. Qeyd etdik ki, θ -həllədicisi olmadığından $[\eta]_\theta$ -ni hesablamaq mümkün deyil. Lakin

yaxşı həlledicidə (məsələn su PEQ üçün yaxşı həlledicidir) xarakteristik özlülüyü ölçməklə K_θ -ni təyin etmək olar. Yaxşı həlledicidə özlülük ölçülərinə görə tapılan xarakteristik özlülük $[\eta]$ ilə K_θ arasında əlaqə yaradan çoxlu sayda ifadələr var [10]. Məsələn, Stokmayer-Fiksman düsturunda $[\eta]$ ilə K_θ arasında əlaqə aşağıdakı kimidir:

$$\frac{[\eta]}{\sqrt{M}} = K_\theta + 0,51B\Phi_\theta\sqrt{M} \quad (2)$$

Burada B -uzağa təsir parametridir və litrlə ölçülür. (2) ifadəsindən istifadə etmək üçün verilmiş temperaturda (məsələn 20°C -də) götürülmüş polimerin (məsələn molekulyar kütləsi $1000 \frac{g}{mol}$ olan polimer) $[\eta]$ xarakteristik özlülüyü təyin olunur. Sonra (2) ifadəsinə əsasən $\frac{[\eta]}{\sqrt{M}} = f(\sqrt{M})$ asılılığı qurulur. Alınan düz xəttin $\sqrt{M} \rightarrow 0$ ekstrapolyasiyasından 20°C -də K_θ -nin qiyməti tapılır. Bu yolla digər temperaturlarda da K_θ -nin qiyməti tapılır. K_θ -nin qiymətini bilərək (1) düsturuna əsasən $[\eta]_\theta$ və sonra $(\bar{h}_\theta^2)^{1/2}$ hesablanır.

Məhlulda makromolekulun konformasiyası şişmə (α) və Kun seqmentinin uzunluğu (A) kimi parametrlərlə də xarakterizə olunur. Polimerin makromolekulu yaxşı həlledicidə α qədər şişir. Bu halda xarakteristik özlülük aşağıdakı kimi təyin olunur [10].

$$[\eta] = \alpha^3 \Phi_\theta \frac{(\bar{h}_\theta^2)^{3/2}}{M} \quad (3)$$

(1) və (3) ifadələrinin müqayisəsindən

$$\alpha^3 = \frac{[\eta]}{[\eta]_\theta} \quad (4)$$

ifadəsi alınır.

Makromolekulun mütəhərriqliyini araşdırmaq məqsədilə Kun seqmentinin uzunluğu hesablanır

$$A = \frac{(\bar{h}_\theta^2)}{nl_0} = \frac{M}{L} \left(\frac{\bar{h}_\theta^2}{\Phi_\theta} \right)^{2/3}$$

Burada \bar{h}_θ^2 -zəncirin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə (Å^2), n -makromolekulda olan təkrarlanan halqaların sayı, l_0 -təkrarlanan halqanın kontur uzunluğudur (Å). [12] işində PEQ makromolekulunda təkrarlanan $-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O}-$ halqasının kontur uzunluğu üçün $l_0 = 2,36 \text{ Å}$ alınmışdır.

Təcrübi hissə

İşdə molekulyar kütləsi 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 olan PEQ-in sulu məhlulunun 293,15-323,15 K temperatur və $1 - 5 \frac{g}{dl}$ konsentrasiya intervalında kinematik özlülüyü ölçülmüşdür.

İstifadə olunmuş PEQ-lər kimyəvi təmizdirlər və məhlullar bidistillə olunmuş su ilə hazırlanmışdır. Ölçülər diametri 0,54mm olan ŞMV-2 viskozimetrində aparılmışdır. Mayenin axma müddəti $\pm 0,01 \text{ san}$ dəqiqliklə təyin edilmişdir. Ölçülən kinematik özlülüyün qiymətləri cədvəl 1-də verilmişdir.

Cədvəl 1. Müxtəlif molekulyar kütləli PEQ-in sulu məhlulunun 293,15-323,15 K temperatur və $1-5 \frac{q}{dl}$ konsentrasiya intervalında kinematik özlülüüyü $\left(\nu, \frac{mm^2}{san} \right)$.

$c, \frac{q}{dl}, T, K$	293,15	298,15	303,15	308,15	313,15	318,15	323,15
0	1,0038	0,8928	0,8008	0,7234	0,6578	0,60	0,5537
ΠƏΓ-1000							
1	1,044	0,927	0,829	0,748	0,678	0,620	0,569
2	1,099	0,974	0,868	0,781	0,703	0,641	0,589
3	1,158	1,027	0,907	0,816	0,732	0,668	0,610
4	1,240	1,095	0,964	0,862	0,768	0,697	0,635
5	1,330	1,168	1,020	0,911	0,804	0,729	0,662
ΠƏΓ-1500							
1	1,059	0,941	0,844	0,763	0,693	0,634	0,583
2	1,132	1,005	0,901	0,812	0,739	0,676	0,621
3	1,216	1,080	0,967	0,872	0,793	0,726	0,666
4	1,322	1,167	1,048	0,947	0,858	0,782	0,718
5	1,443	1,275	1,141	1,030	0,933	0,852	0,781
ΠƏΓ-3000							
1	1,081	0,961	0,862	0,778	0,707	0,647	0,595
2	1,174	1,044	0,937	0,843	0,765	0,701	0,644
3	1,294	1,150	1,020	0,925	0,839	0,760	0,698
4	1,415	1,259	1,129	1,011	0,914	0,838	0,769
5	1,574	1,395	1,246	1,115	1,008	0,919	0,843
ΠƏΓ-4000							
1	1,098	0,975	0,874	0,788	0,716	0,654	0,601
2	1,212	1,074	0,961	0,865	0,784	0,715	0,657
3	1,344	1,190	1,063	0,955	0,864	0,786	0,721
4	1,504	1,326	1,182	1,060	0,956	0,868	0,795
5	1,674	1,473	1,315	1,174	1,060	0,959	0,878
ΠƏΓ-6000							
1	1,159	1,029	0,920	0,829	0,752	0,687	0,630
2	1,354	1,198	1,068	0,959	0,866	0,789	0,724
3	1,591	1,405	1,250	1,123	1,012	0,920	0,830
4	1,863	1,643	1,457	1,299	1,166	1,057	0,958
5	2,186	1,922	1,697	1,514	1,353	1,226	1,111

Kinematik özlülüyn cədvəl 1-də verilən qiymətlərinə əsasən PEQ-in sulu məhlulunun $[\eta]$ xarakteristik özlülüüyü hesablanmışdır (cədvəl 2).

Cədvəl 2. Müxtəlif molekulyar kütləli PEQ-in sulu məhlulunun müxtəlif temperaturalarda xarakteristik özlülüüyü $\left([\eta] \frac{dl}{q} \right)$.

T, K	ΠƏΓ-1000	ΠƏΓ-1500	ΠƏΓ-3000	ΠƏΓ-4000	ΠƏΓ-6000
293,15	0,0341	0,0471	0,0675	0,0837	0,1343
298,15	0,0331	0,0467	0,0674	0,0824	0,1325
303,15	0,0310	0,0466	0,0672	0,0817	0,1299
308,15	0,0301	0,0465	0,0670	0,0803	0,1277

313,15	0,0273	0,0463	0,0666	0,0794	0,1257
318,15	0,0266	0,0463	0,0665	0,0780	0,1240
323,15	0,0255	0,0460	0,0663	0,0774	0,1216

Cədvəl 2-də verilən qiymətlərə əsasən (2) ifadəsindən istifadə edərək, nəzəri hissədə şərh olunan qayda üzrə, θ -konstant K_θ hesablanmışdır (cədvəl 3).

Cədvəl 3. PEQ-in sulu məhlulu üçün θ -konstant K_θ -nin temperaturdan asılılığı

T, K	293,15	298,15	303,15	308,15	313,15	318,15	323,15
$K_\theta \cdot 10^4, \frac{dl}{q}$	6,69	6,48	6,04	5,98	5,24	5,21	5,03

K_θ -nin qiymətini bilərək (1) ifadəsindən istifadə edərək əvvəlcə θ -həllədicidə $[\eta]_\theta$ xarakteristik özlülük (cədvəl 4), sonra (4) ifadəsinə əsasən makromolekul yumağının α şişmə dərəcəsi (cədvəl 5) hesablanmışdır.

Cədvəl 4. θ -həllədicidə PEQ-in məhlulunun xarakteristik özlülüğü ($[\eta]_\theta, \frac{dl}{q}$).

T, K	ПЭГ-1000	ПЭГ-1500	ПЭГ-3000	ПЭГ-4000	ПЭГ-6000
293,15	0,0212	0,0259	0,0366	0,0423	0,0518
298,15	0,0205	0,0251	0,0355	0,0410	0,0502
303,15	0,0191	0,0234	0,0331	0,0382	0,0468
308,15	0,0189	0,0232	0,0328	0,0378	0,0464
313,15	0,0166	0,0203	0,0287	0,0331	0,0406
318,15	0,0165	0,0202	0,0285	0,0329	0,0404
323,15	0,0159	0,0195	0,0276	0,0318	0,0390

Cədvəl 5. Məhlulda PEQ makromolekulunun şişmə əmsalı (α)

T, K	ПЭГ-1000	ПЭГ-1500	ПЭГ-3000	ПЭГ-4000	ПЭГ-6000
293,15	1,173	1,220	1,226	1,255	1,373
298,15	1,173	1,230	1,238	1,262	1,382
303,15	1,175	1,258	1,266	1,288	1,405
308,15	1,167	1,261	1,269	1,285	1,402
313,15	1,181	1,317	1,325	1,338	1,458
318,15	1,173	1,319	1,326	1,333	1,454
323,15	1,170	1,331	1,340	1,345	1,461

Cədvəl 5-dən göründüyü kimi, temperaturun artması ilə makromolekulun şişməsi də artır. Yəqin ki, bu onunla əlaqədardır ki, temperaturun artması ilə PEQ və su molekulları arasındakı qarşılıqlı təsir zəifləyir. Nəticədə makromolekul yumağı daha çox açılır və su molekulları ondan asan keçə bilirlər.

K_θ -nin qiymətlərini bilərək PEQ molekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafəsi $(\bar{h}_\theta^2)^{1/2}$ (1) ifadəsindən hesablanmışdır (cədvəl 6).

Cədvəl 6. Məhlulda PEQ molekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə $(\bar{h}_\theta^2)^{1/2}, \text{Å}$

T, K	ПЭГ-1000	ПЭГ-1500	ПЭГ-3000	ПЭГ-4000	ПЭГ-6000
293,15	46,5	57,0	80,6	93,1	114,0
298,15	46,0	56,4	79,7	92,1	112,8
303,15	45,0	55,1	77,9	90,0	110,2

308,15	44,8	54,9	77,7	89,7	109,8
313,15	42,9	52,5	74,3	85,8	105,0
318,15	42,8	52,4	74,1	85,6	104,9
323,15	42,3	51,8	73,3	84,6	103,7

Cədvəl 6-dan göründüyü kimi, temperaturun artması ilə molekul zəncirinin ucları arasındakı məsafə azalır.

Məhlulda polimer makromolekulunun konformasiyasının müəyyən bir formaya malik olmasında molekul zəncirinin sərtliyinin və mütəhərrikiyinin böyük rolu var. Makromolekul zəncirinin sərtliyini və mütəhərrikiyini xarakterizə edən ən vacib parametr Kun seqmentinin uzunluğudur ($A, \text{Å}$). Əgər zəncir olduqca mütəhərrikdirsə, onda Kun seqmentinin uzunluğu bir halqanın kontur uzunluğuna bərabər olur, əgər zəncir olduqca sərtdirsə, onda zəncirin tam uzunluğu L -ə bərabər olur. (5) ifadəsi ilə hesablanmış Kun seqmentinin uzunluğu cədvəl 7-də verilmişdir.

Cədvəl 7. PEQ-in sulu məhlulunda müxtəlif temperaturalarda Kun seqmentinin uzunluğu ($A, \text{Å}$)

T, K	293,15	298,15	303,15	308,15	313,15	318,15	323,15
$A, \text{Å}$	40,4	39,5	37,7	37,5	34,3	34,2	33,4

Cədvəl 6-dan göründüyü kimi, Kun seqmentinin uzunluğu polimerin molekulyar kütləsindən asılı deyildir, lakin temperaturun artması ilə $40,4 \text{ Å}$ -dən $33,4 \text{ Å}$ -ə kimi azalır. PEQ-in sulu məhlulunda Kun seqmentinin uzunluğu $<100 \text{ Å}$ kiçik olduğundan, PEQ-i mütəhərrik polimerə aid etmək olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Тагер А.А., Вишкков С.А., Андреева В.М., Секачева Т.В. // Высокомолекулярная соединения. 1974. т.16.А, №1, с. 9.
2. Усков И.А., Цыляева А.М., Кленин В.И., Раевский В.С. // Высокомолекулярная соединения. 1976. т.18.А, №1, с. 243.
3. Тагер А.А. // Высокомолекулярная соединения. 1972. т.14.А, №12, с. 2690.
4. Bailey F.E., Callard R.W. // J. Appl Polym. Sci 1959, V 1, p.56, 373.
5. Boucher E.A., Hines P.M. // J. Polym. Sci. phys. Ed. 1976, V. 14. p. 2241.
6. Сибилева М.А., Тарасова Э.А. // Жур. физ. химии. 2004, т.78, №7, с. 1240-1244.
7. Шуляк И.В., Грушова Е.И., Семеченко А.М. // Жур. физ. химии. 2011 т.85, №3, с. 485-488.
8. Шуляк И.В., Грушова Е.И. // Жур. физ. химии. 2013 т.87, №12, с. 2079-2084.
9. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Мусаева С.И. // Жур. физ. химии, 2013, том 87, №12, с.2151-2153.
10. Рафиков С.Р., Будтов В.П., Монаков Ю.Б. // Под ред. В.В. Коршака. Введение в физико-химию растворов полимеров. М.: Наука, 1978. 328с.
11. Stokmayer W.H., Fixman M. // J. Polym. Sci. 1963. Part C. №1. p.137.
12. Шуляк И.В., Грушова Е.И. // XI международная конференция "Проблемы сольватации и комплексообразования в растворах". Тез. докл: Иваново. 2011. с.200.

UOT 621. 315. 592PASC: 65.40.-b

CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTICS OF ALLOY SYSTEMS $TlInC_2^{VI} - TlLnC_2^{VI}$

E.M. GOJAEV¹, S.KH. AGAEVA²

Azerbaijan Technical University

National Academy of Aviation of Azerbaijan

geldar-04@mail.ru

ABSTRACT

The paper presents the results of an investigation of the current-voltage characteristic in ternary compounds of the type $A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ and solid solutions $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ obtained on their basis, with partial substitution of indium atoms and lanthanide atoms in the $TlInC_2^{VI}$ lattice. It was revealed that these crystals have switching properties with memory, i.e. starting from a certain value of the voltage, the sample jumps from the high-resistance state to the low-resistance state. Partial substitution of indium atoms lanthanide atoms in the $TlInC_2^{VI}$ lattice, the threshold voltage decreases. With decreasing temperature, the threshold value of the voltage increases, and the characteristics become pronounced S-shaped.

Key words: switching effect, the threshold voltage, $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ solid solutions, S-shaped, current-voltage characteristics.

ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЛАВОВ СИСТЕМ $TlInC_2^{VI} - TlLnC_2^{VI}$ **РЕЗЮМЕ**

В работе излагаются результаты исследования вольтамперной характеристики в тройных соединениях типа $A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ и твердых растворах $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$, полученных на их основе, при частичном замещении атомов индия, атомами лантаноидов в решетке $TlInC_2^{VI}$.

Выявлено, что эти кристаллы обладают переключающими свойствами с памятью, т.е. начиная с определенного значения напряжения образец скачкообразно, переходит из высокоомного состояния в низкоомное. При частичном замещении атомов индия атомами лантаноидов, в решетках $TlInC_2^{VI}$ пороговое напряжение уменьшается. С уменьшением температуры пороговое значение напряжения увеличивается, и характеристики становятся ярко выраженной S-образной формы.

Ключевые слова: эффект переключения, пороговое напряжения, твердые растворы $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$, S-образной формы, вольтамперные характеристики.

 $TlInC_2^{VI} - TlLnC_2^{VI}$ LAYLI SISTEMLƏRİN VOLT- AMPER XARAKTERISTIKALARI**XÜLASƏ**

Verilmiş işdə $A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ tip üçqat birləşmələrinin və $TlInC_2^{VI}$ kristallik qəfəslərdə 3 valentli indium atomlarının 3 valentli lantanoidlərlə qismən əvəz edilməsi ilə alınan $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ bərk məhlullarının volt – amper xarakteristikalarının tədqiqinin nəticələri verilmişdir.

Aşkar edilmişdir ki, bu kristallar yaddaşlı çevirmə xassəsinə malikdirlər, yəni, gərginliyin müəyyən qiymətindən etibarən nümunələr sıcrayışla yüksək müqavimətli haldan aşağı müqavimətli hala keçir. $TlInC_2^{VI}$ kristallik qəfəslərində Indium atomlarının lantanoidlərlə əvəz edilməsi zamanı çevirmənin baş verdiyi astana gərginliyi azalır. Temperaturun azalması ilə astana gərginliyinin qiyməti artır və xarakteristikalar aydın ifadə olunmuş S - ə bənzər formada alınır.

Açar sözlər: çevirmə effekti, astna gərginliyi, S - ə bənzər forma, $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ bərk məhlulları, volt- amper xarakteristikaları.

Введение

Открытие эффекта переключения в халькогенидных полупроводниках и разработка на их основе переключающих приборов [3, 8, 11, 12, 26] послужило толчком к целенаправ-

ленному изучению вольтамперных характеристик (ВАХ) полупроводников сложного состава [5, 10, 15, 16].

Использование полупроводниковых приборов, принцип работы которых связан с эффектом переключения или приборов с отрицательным сопротивлением (ОС), позволяет значительно упростить схемные решения, так как обратная связь осуществляется не внешними цепями, а самим прибором, благодаря наличию внутренней положительной обратной связи. Поэтому применение приборов с ОС дает возможность значительно повысить надежность при одновременном существенном сокращении габаритов, массы радиоэлектронной аппаратуры и снижения потребляемой мощности. Наиболее полное преимущество приборов с ОС проявляются при использовании их в микроэлектронике. Полупроводниковые приборы с ОС являются по существу элементарными твердыми функциональными схемами, так как благодаря наличию ОС они могут выполнять функции усилителей, генераторов, преобразователей и т. п. Для этого к ним обычно достаточно присоединить нагрузку и источник питания. Создав в одной пластине полупроводника несколько приборов с ОС и осуществив между ними объемную связь, можно получить более сложные функциональные схемы [6, 11, 18, 19, 22, 23, 26].

Основные преимущества полупроводниковых переключателей следующие: симметричность ВАХ, что позволяет производить переключение независимо от полярности сигнала, эффект памяти, т. е. находиться в любом из двух возможных состояний неограниченно долго при отключении от источников питания. Наличие переключения с памятью определяется составом активного материала и электрическим режимом перевода прибора из одного состояния в другое. Нечувствительность к уровням радиации, при которых биполярные приборы выходят из строя, простота конструкции и возможность совмещать технологию создания переключателей с технологией гибридных и монокристаллических интегральных схем вызывают большой интерес к таким приборам, а ограниченное число переключений является общей проблемой такого рода устройств и временным препятствием для массового применения их в технике.

Особый интерес вызывает эффект переключения с памятью. Такие переключения устойчивы в закрытом и открытом состояниях при снятии с них напряжения. Изготовленный прибор находится в высокоомном состоянии. Эффект формовки, в отличие от переключателей без памяти, отсутствует. Эффект переключения с памятью наступает при определенных значениях времени и амплитуды проходящего через элемент тока в открытом состоянии, а его механизм связан с обратным фазовым переходом стекло-кристалл в токовом канале [1, 2, 4, 5, 7, 9, 13, 14, 17, 20, 21, 24]. Поэтому с целью обеспечения высокой надежности работы элементов памяти рекомендуется обеспечить такой режим эксплуатации, когда реализуется более простой переход стекло-кристалл. Ячейки памяти, как показано в [26] позволяют поднять рабочую температуру, обеспечить проведение фото литографии. Изучение ВАХ позволяет понять причины резкого изменения электропроводности исследуемых образцов при переходе их из состояния высокого сопротивления в состояние высокой проводимости, а также причины, приводящие к известной нестабильности пороговых переключателей и разработать приборы со стабильностью порогового напряжения не хуже 1-2%. Эти актуальные задачи к настоящему времени еще не имеют удовлетворительного решения.

Приборы с ОС классифицируются по форме вольтамперных характеристик, которые могут быть двух видов: а) характеристики N-типа, управляемые напряжением и неоднозначные по току; б) характеристики S-типа управляемые током и неоднозначные по

напряжению. Одним из больших преимуществ приборов с ВАХ S -типа является то, что они обладают эквивалентной реактивностью индуктивного характера. Поэтому для создания резонансной системы к ним достаточно подключить внешнюю емкость, которая может быть легко реализована микроэлектронными методами. Кроме использования в качестве функциональных элементов, приборы с ОС S -типа можно применять как датчики света, магнитного поля, давления и т.д. Участок ОС на ВАХ диода может образоваться только при наличии внутренней положительной обратной связи. Для диода с ВАХ S -типа это должна быть положительная обратная связь по току. Это означает, что любое изменение тока должно вызывать дальнейшее изменение тока в том же направлении.

В настоящее время ведутся интенсивная исследовательская работа по выявлению новых материалов обладающих переключающими свойствами с памятью. Еще в середине прошлого столетия начали интенсивную работу по получению и исследованию тройных соединений типа $A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ и выявлено, что эти соединения имеют высокие коэффициенты фото и тензочувствительности, обладают переключающими свойствами с памятью. В дальнейшем, с частичным замещением трехвалентных атомов индия в решетках типа $TlInC_2^{VI}$ атомами лантаноидов были получены новый класс полупроводниковых материалов. $TlIn_{1-x}Ln_xC_2$. Были выявлены, что и эти материалы обладают переключающими свойствами [10, 15]. Однако, последовательные и системные исследования ВАХ, в этих кристаллах не проводились. В этой связи настоящая работа посвящена исследованию ВАХ в кристаллах $TlIn_{1-x}Ln_xC_2$.

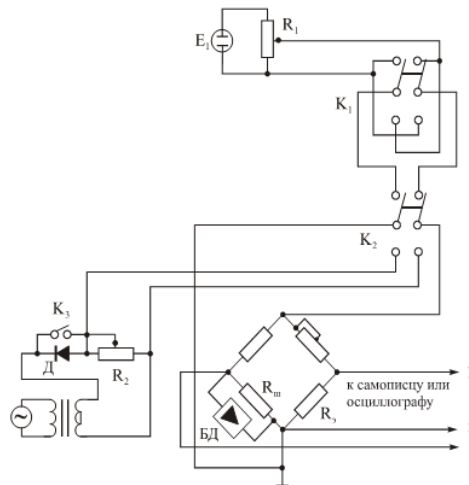
Методика эксперимента

Экспериментальные статические ВАХ сплавов системы $TlIn_{1-x}Ln_xC_2$ снимались на постоянном токе по стандартной методике (рис.1), где E_1 – источник постоянного тока, R_1 – потенциометр, K_1 – ключ для смены полярности источника постоянного напряжения, K_2 – ключ коммутации переменного и постоянного напряжений и K_3 с диодом D – для подачи синусоидального напряжения на схему моста. Схема моста обеспечивала режим генератора тока для переключающего элемента. Сопротивление R калибровано по току и определяет начальный ток включения элемента.

При снятии статической ВАХ к входу моста подключался двух- координатный самописец. Медленным перемещением движка потенциометра R_1 ток через прибор в прямом смещении изменяется от нуля до определенного значения и обратно, затем переключателем K_1 менялась полярность E_1 . Аналогично снималась обратная ветвь ВАХ.

Для исследования ВАХ сплавов $TlIn_{1-x}Ln_xC_2$ в качестве образцов были использованы кристаллы прямоугольной формы. Омическими контактами служили In, Fe, Al и контакты были проверены четырехточечным методом, последовательным измерением сопротивления на образцах различной толщины. Образцы обладали p -типом проводимости. Это определено измерениями коэффициента Холла и термо-э.д.с. Вольтамперные характеристики исследовались в температурном интервале $77 \div 400K$.

Рис. 1. Принципиальная схема для снятия ВАХ в статическом режиме.



Экспериментальные результаты и их обсуждение

Результаты исследования вольтамперных характеристик тройных соединений $TlInSe_2$, $TlInTe_2$, $TlGaTe_2$ при различных температурах приводятся на рис. 2. и твердых растворов на их основе $TlIn_{1-x}Ln_xC_2$ представлены на рис.3-6. Как следует из рис.2 для исследованных тройных соединений с увеличением напряжения $I(U)$ характеристика затухала и была строго нелинейной и S-образной формы. Выявлено, что в омической области температура образца остается постоянной, а в области отрицательного дифференциального сопротивления (ОДС) увеличивается до температуры T , обычно больше, чем окружающая температура. S-образная характеристика в области высоких токов с лучшей выраженной областью отрицательного сопротивления, становится впоследствии критическим током (пороговый ток). Часть ОДС на кривой прибора более сильно выражена при низких окружающих температурах. Переход от низких к высоким электропроводностям на кривой является почти резким при низких температурах. В области ОДС на кривой $I(U)$ измеряли температуру для образца $TlGaTe_2$ в каждой точке, посредством термоэлемента прикладываемого к образцу. Для этой цели были использованы теплопроводящая и электрически изоляционная паста.

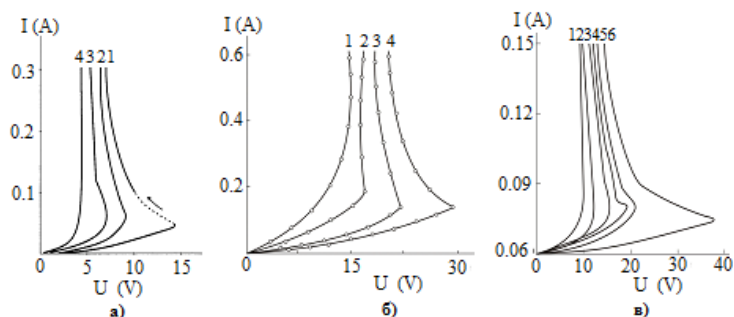
На рис.3-6 приведены вольтамперные характеристики кристаллов $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$. Как следует из рисунков исследованные кристаллы обладают переключающими свойствами.

Представляется почти очевидным, что переключение в массивных образцах из кристаллов $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ обусловлено тепловыми эффектами, хотя чисто тепловая модель не может полностью объяснить наблюдаемые характеристики переключения влиянием джоулева тепла, особенно в проводящем состоянии им нельзя пренебрегать. При электронно-термическом механизме эффекта переключения принимается во внимание совместное воздействие электрического поля и температуры на полупроводник, который из высокоомного состояния переходит в низкоомное состояние. Тепловой механизм эффекта определяется в основном теплоемкостью, теплопроводностью и зависимостью сопротивления активной области образца от температуры.

При исследовании кристаллов вышеуказанного типа оказалось, что при низких напряжениях $I(U)$ характеристики линейны и соответственно контакт омический (рис.2). При

высоких напряжениях характеристики оказались нелинейными и обладали S -образной формой. Для исследованных кристаллов S -образная кривая в области высоких токов с лучше выраженной областью ОДС становилась впоследствии критическим (пороговым) током. Часть ОДС на кривой $I(U)$ более выражена при низких окружающих температурах.

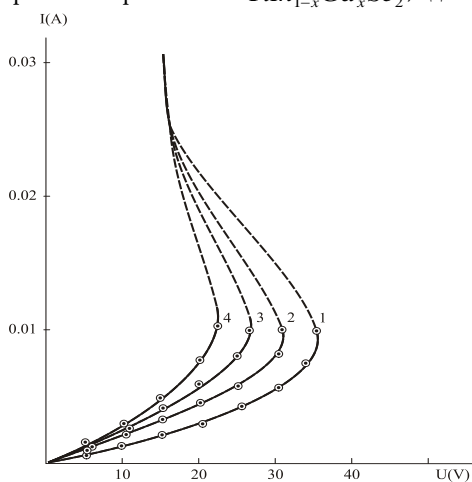
Рис. 2. Вольтамперные характеристики соединений $TlInSe_2$, $TlInTe_2$, $TlGaTe_2$ при различных температурах:



а) $TlInSe_2$ (1- $T=80K$; 2- $T=120K$; 3- $T=220K$; 4- $T=300K$); б) $TlInTe_2$ (1- $T=400K$, 2- $300K$, 3- $150K$, 4- $80K$);
в) $TlGaTe_2$ (1- $340K$; 2- $320K$; 3- $300K$; 4- $200K$; 5- $120K$; 6- $80K$).

Результаты исследования ВАХ кристаллов $TlIn_{1-x}Gd_xSe_2$ приводятся на рис.3. Как следует из рис.3. эти кристаллы обладают переключающими свойствами. Величина порогового напряжения увеличивается при частичном замещении атомов индия атомами гадолиния в решетке $TlInSe_2$.

Рис. 3. Вольтамперная характеристика кристаллов $TlIn_{1-x}Gd_xSe_2$, где 1- $x=0$; 2- $x=0.02$; 3- $x=0.04$; 4- $x=0.09$.



Анализ полученных результатов показал, что уменьшение напряжения прямого перехода при каждом последующем переключении и существенная нелинейность ВАХ до пороговых электрических полей характерна для всех нами исследованных кристаллов.

Суперлинейный участок ВАХ хорошо описывается трехчленным полиномом в виде

$$I = aU + bU^2 + cU^3,$$

где численные значения коэффициентов легко определяются и различны для различных составов.

Отметим, что форма представления участка ВАХ в допороговых электрических полях в виде трехчленного полинома является весьма наглядной при физической интерпрета-

ции составляющих и удобной в расчетах, так как влияет на номограмму коэффициентов и тем самым можно исключить дополнительные эксперименты по снятию ВАХ. Нелинейное изменение проводимости в допороговых полях можно объяснить процессом заполнения и опустошения ловушек. Наличие экспериментальной зависимости свидетельствует о квазинепрерывном энергетическом распределении локальных уровней в запрещенной зоне халькогенидного полупроводника данного состава.

При переходе от исходных соединений $TlInC_2$ к твердым растворам на их основе пороговые значения напряжения уменьшаются (рис.3).

В твердых растворах $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ при частичном замещении атомов индия атомами лантаноидов в решетке $TlInC_2^{VI}$ происходит постепенное уменьшение порогового переключения (рис.4-6). Это объясняется следующим образом: атомы индия частично замещаются теми атомами лантаноидов, которые в отличие от атомов индия имеют менее вероятное стремление к образованию sp^3 – гибридной связи и способствуют увеличению металлической доли химической связи. А это связано с тем, что при частичном замещении атомов индия атомами лантаноидов уменьшается смещение максимума электронной плотности к остаткам атомов халькогена, т.е. уменьшаются возможности достройки внешних электронных оболочек атома до устойчивой конфигурации $s^2 p^6$. В связи с этим, степень ионности химической связи уменьшается, т.е. уменьшается статистический вес $s^2 p^6$ – конфигураций и происходит уменьшение значения порогового напряжения в кристаллах $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$.

Полученные ВАХ исследованных кристаллов $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ идентичны. Это связано с тем, что кристаллическая структура и тип химической связи между атомами исследованных кристаллов, также как и исходные $TlInC_2$ практически одинаковы. В этой связи ограничимся обсуждением результатов исследования $TlInC_2$. Для указанной фаз в каждой омической области ВАХ определена электропроводность и измерена температура образцов.

Нами полученные результаты показывают, что область контролируемая током корректирована увеличением температуры образца. Анализ результатов показывает, что с уменьшением окружающей температуры происходит миграция $U_{пор}$ к высоким значениям, а с увеличением окружающей температуры слабое появление области ОДС на ВАХ.

Рис.4 Вольт – амперные характеристики сплавов систем
а) $TlIn_{1-x}Pr_xSe_2$ б) $TlIn_{1-x}Nd_xSe_2$, где 1- $x=0.02$; 2- 0.04 ; 3- $x=0.06$; 4- $x=0.08$

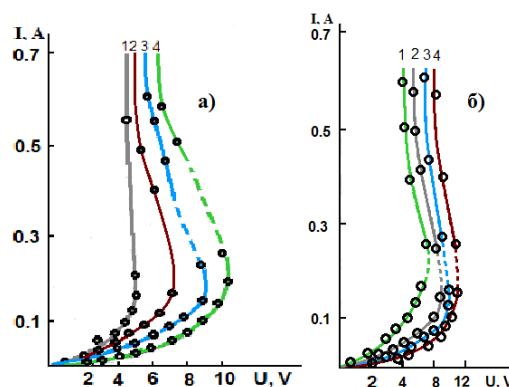


Рис.5 Вольт – амперные характеристики сплавов систем
 а) $TlIn_{1-x}La_xSe_2$ б) $TlIn_{1-x}Ce_xSe_2$, где 1- $x=0.02$; 2- 0.04 ; 3- $x=0.06$; 4- $x=0.08$

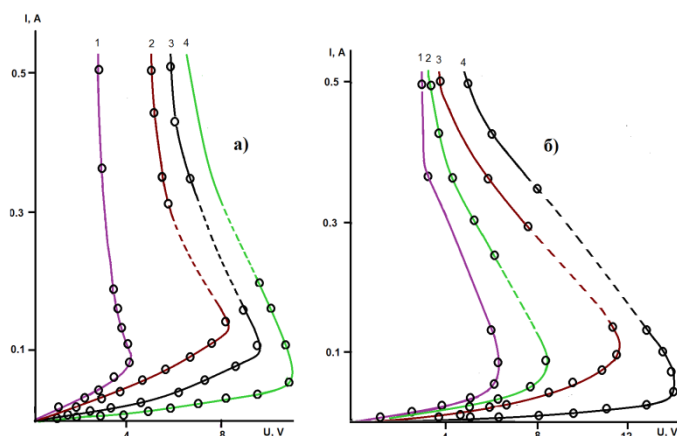
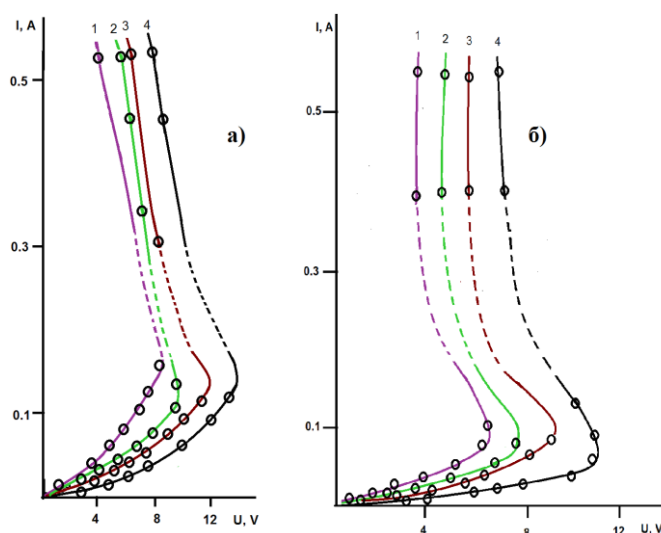


Рис.6 Вольт – амперные характеристики сплавов систем
 а) $TlIn_{1-x}Sm_xSe_2$ б) $TlIn_{1-x}Eu_xSe_2$, где 1- $x=0.02$; 2- 0.04 ; 3- $x=0.06$; 4- $x=0.08$



Эти результаты доказывают, что действительно электротепловые процессы ответственны в появлении области ОДС в кристаллах $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$.

В электротепловых процессах допускаются малые локальные отклонения от однородного распределения несовершенств, приводящих к высоким токовым плотностям в этих областях. Такое повышение токовой плотности обычно сопровождается формированием высокотокковой плотности нити накала в образцах. В этих «каналах» повышенная токовая плотность результат увеличения энергии рассеяния приводящая к Джоулеву теплу. В связи с увеличением температуры электропроводность тоже увеличивается и дает возможность протеканию высокого тока. Устойчивое состояние этого поведения будет достигаться тогда, когда тепловое рассеяние будет равно тепловым потерям.

Устойчивое состояние ВАХ и особенности их области ОДС можно интерпретировать электротермическим приближением. При низких токовых значениях это соответствует нормам. Увеличение нагревания внутренней части образца приводит к повышенной концентрации свободных носителей в этой области из-за полупроводникового характера кристаллов $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$. Высокая нить накала может быть создана во внутренней стороне образца.

Полученные результаты по исследованию ВАХ сплавов $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ позволяют сделать вывод о том, что при создании быстродействующих переключающих приборов, как элементов микроэлектроники и вычислительной техники следует получать образцы малой толщины, которые менее чувствительны к температуре и для которых практически отсутствует зависимость порогового напряжения от толщины активной области переключающего элемента.

Таким образом, исследуя ВАХ кристаллов $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ при различных условиях установили, что основными переключающими характеристиками указанных фаз можно управлять в зависимости от материала контактов, температуры, геометрических размеров и от состава.

Хочется особо отметить, что нами полученные результаты по исследованию ВАХ тройных аналогов $TlSe$ и твердых растворов на их основе хорошо согласуется с результатами работ [25].

Заключение

Выявлено, что с изменением температуры, геометрических размеров образцов и состава сплавов $TlIn_{1-x}Ln_xC_2^{VI}$ можно управлять пороговые параметры переключателей на их основе в нужную сторону.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.Waser Redox-based resistive switching memories J Nanosci Nanotechnol., 2012, 12(10):7628-40.
2. C. Rodenbücher, W. Speier, G. Bihlmayer, U. Breuer, R. Waser, K. Szot 8.
3. С.А.Костылев, В.А.Шкут. Электронные переключения в аморфных полупроводниках. // Кишинев, 1978, 203с.
4. С.А.Костылев, И.Ф.Ходжипирова, В.А.Шкут. Переключения в локализованном возникновение отрицательного дифференциального сопротивления S-типа. // ФТП, 1991, т. 25, №12, с.2184-2188.
5. Э.М.Годжаев, К.Д.Гюльмамедов, Х.С.Халилова, С.О.Гулиева. Эффект переключения на тонких пленках $TlInSe_2$. // Электронная обработка материалов, 2011, 47(5), с.18-22.
6. Д.К.Параничев, П.А.Болдин, Н.А.Кулдин, А.А.Величко, В.В.Путролайнен. Моделирование вольтамперный характеристик фотогальванического элемента на основе оксида никеля. // Вестник ВГТУ, 2011, т.7, №9, с.99-101.
7. Н.А.Торхов. Влияние фото-эдс на тока прохождения в контактах металл-полупроводник с барьером Шоттки. // ФТП, 2011, т.45, в.7, с.965-973.
8. С.А.Костылев, В.А.Шкут, В.Я.Крысь. О наблюдении безгистерезисного переключения и статического отрицательного сопротивления в пленках аморфных полупроводников. // Письма в ЖЭТФ, 1975, т.21, в.4, с.232-235.
9. Н.А.Торхов, В.А.Новиков. Влияние периферии контактов металл-полупроводник с барьером Шоттки на их электрофизические характеристики. // ФТП.2011, т.45, в.1, с.70-81.
10. Э.М.Годжаев, З.М.Абдуллаев, Ш.М.Гусейнова. О переключающих свойствах тройных и четверных халькогенидов типа $TlSe$. // ЦНИИ «Электроника», 1976, депонирован за №3975/76.
11. С.А.Кутолин, В.П.Котенко. Эффект переключение в аморфных полупроводниках и области его применения. // Обзоры по электронной технике. Макроэлектроника, ЦНИИ «Электроника», Москва, 1973, в.4, 110с.
12. Н.А.Торхов. Влияние периферии контактов металл-полупроводник с барьером Шоттки на их статические вольт-амперные характеристики. // ФТП, 2010, т.44, в.5, с.615-627.
13. Н.А.Богославский. Электронно-тепловая модель эффекта переключения и памяти, основанная на многофононной туннельной ионизации U центров в халькогенидных полупроводниках. / Авто. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.мат.наук., ФТИ им.А.Ф.Иоффе, Санкт-Петербург, 2013, 22 с.

14. Н.А.Богославский, К.Д.Ценден. Физика эффектов переключения памяти в халькогенидных стеклообразных полупроводниках. // ФТП, 2012, т.46, в.5, с.577-608.
15. E.M.Gojaev, P.F.Alieva, N.S.Nabiev, R.S.Rahimov. Current-voltage Characteristic of Bridgeman-Stockbarger InGaSe₂ Thin Films. Physical Science International Journal, ISSN: 2348-0130, 2016, Vol.: 9(1), Issue.: 1, pp. 1-7.
16. П.С.Захаров, А.Г.Итальянцев. Эффект переключения электрической проводимости в структурах металл-диэлектрик-металл на основе нестехиометрического оксида кремния. // Труды МФТИ, 2015, т.7, №2, с.113-118.
17. Р.А.Кастро, Г.И.Грабко. Исследование диэлектрических процессов в аморфных пленках (As₂Se₃)_xBi_x. // Физика и техника полупроводников. 2011. т.45(5). С.622-624.
18. П.А.Тетерик, А.В.Зенкевич, А.А.Чуприк, А.С. Батурин. Использование перехода металл-полупроводник в тонкопленочных слоях SmS для создания переключающих устройств // В сб.:труды 54-й научной конференции МФТИ.- М., 2011, с.58-59.
19. N. Almasov, N. Bogoslovskiy, N. Korobova et. al. Switching and memory effects in partly crystallized amorphous Ge₂Sb₂Te₅ films in a current controlled mode. // Journal of Non-Crystalline Solids. 2012, vol. 358, pp. 3299–3303.
20. М.С.Котова, М.А.Дронов, И.А.Белогорохов. Эффект резистивного переключения в полимерных материалах, содержащих металлические микрочастицы и энергонезависимая память на его основе. // Ученые записки физического факультета МГУ, 2012, т.3, №2, с.122501-1 -122501-5
21. С.А.Фефелов, Л.П. Казакова, С.А. Козюхин, К.Д. Цэндин, Д.Арсова,В. Памукчиева. Особенности вольт-амперных характеристик в тонких пленках состава Ge₂Sb₂Te₅ при использовании измерительной цепи с источником тока // ж. Тех. Физ., 2014, т.84, в.3, с.80-84.
22. Р.С.Мадатов, А.С.Алекперов, О.М. Гасанов. Эффект переключения и памяти в слоистых кристаллах GeS. // Прикладная физика, 2015, №4, с.11-15.
23. А.Д. Погребняк, С.Н. Братушка, В.М. Береснев, N. Levintant-Zayonts Эффект памяти формы и сверхэластичность сплавов никелида титана, имплантированных высокими дозами ионов. // Успехи химии, 2013, Том 82, Номер 12, с.1135-1159.
24. Jankowska-Sumara, K.Szot, A.Majchrowski, K.Roleder Effect of resistive switching and electrically driven insulator-conductor transition in PbZrO₃ single crystals. // P A, 2013, 210: pp.507-512.
25. M. Haniias, A.N.Anagnostopoulos, K. Kambas, J.Spyridelis I-U dependence of TlInX₂ (X=Se, Te) single crystals. // The Ohmic and S-type regions Physical Review B, 1991, vol.43, №5, pp.4135-4140.
26. А.А.Маилов. Переключающие приборы на основе аморфных полупроводниковых материалов. // «Электронная техника», серия У1 «Микроэлектроника», 1971, в.3, с.3-13.

UOT:538.958PACS:78.67.-n

TWO-PHOTON TRANSITIONS IN SEMICONDUCTOR QUANTUM WELL

I.R. GADIROVA

Baku State University

Baku/ AZERBAIJAN

irada.gadirova@mail.ru

ABSTRACT

The two-photon interband transition rate for a semiconductor quantum well with the modified Pöschl-Teller potential is calculated using second order perturbation theory. The transition rate as a function of two-photon energy is presented for polarization of the light both parallel and perpendicular to the growth axis of the quantum well and for various values of the quantum well parameters.

The two-photon transition rate grows continuously with the photon energy and it increases both with the increase in the number of subbands and with the decrease in the quantum well depth for the light polarized in the plane of the quantum well, whereas it is a nonmonotonic function of the photon energy for light polarized along the growth axis..

Key words: two-photon transitions, quantum well, modified Pöschl-Teller potential.

ДВУХФОТОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ КВАНТОВОЙ ЯМЕ

РЕЗЮМЕ

Методом теории возмущений вычислена вероятность двухфотонных межзонных переходов в квантовой яме с модифицированным потенциалом Пешля-Теллера. Представлена зависимость вероятности переходов от энергии двухфотонных переходов для света, поляризованного как параллельно, так и перпендикулярно оси роста квантовой ямы, а также для различных значений параметров квантовой ямы.

Вероятность двухфотонных переходов непрерывно растет с увеличением энергии фотона, а также увеличивается как с увеличением числа подзон так и с уменьшением глубины квантовой ямы для света, поляризованного в плоскости квантовой ямы, тогда как для света, поляризованного вдоль осм роста она является немонотонной функцией энергии фотона.

Ключевые слова: двухфотонные переходы, квантовая яма, модифицированный потенциал Пешля-Теллера.

YARIMKEÇİRİCİ ƏSASLI KVANT ÇUXURUNDA İKİFOTONLU KEÇİDLƏR

XÜLASƏ

Nəyəcanlanma nəzəriyyəsi əsasında modifikasiya olunmuş Peşle-Teller potensialına malik kvant çuxurunda elektronların zonalararası ikifotonlu keçidlərinin ehtimalı hesablanmışdır. İşıq polyarlaşmasının kvant çuxurunun oxuna parallel və perpendikulyar olduğu hallarda və kvant çuxurunun parametrlərinin müxtəlif qiymətləri üçün ikifotonlu kecid ehtimalının foton enerjisindən asılılığı hesablanmışdır.

İkifotonlu kecid ehtimalı işıq polyarlaşmasının kvant çuxurunun oxuna parallel olduğu halda foton enerjisinin qeyri monoton funksiyası olur, işıq polyarlaşması kvant çuxurunun oxuna perpendikulyar olduğu halda isə foton enerjisinin artması ilə kəsilməz artır, bu ehtimal altzonaların sayının artması və kvant çuxurunun dərinliyinin azalması ilə də artır.

Acar sözlər: ikifotonlu keçidlər, kvant çuxuru, modifikasiya olunmuş Peşle-Teller potensialı.

1. Introduction

Two-photon processes are important at high intensities of radiation and are useful method for investigation of electronic properties of solids . Two-photon spectroscopy yields information not accessible to one-photon processes because the selection rules for these transitions are diffe-

rent. Two-photon absorption in quantum well structures has been extensively studied both theoretically and experimentally for many years[1-5] and has potential applications in a variety of optical devices [6]. Most of the previous studies use rectangular quantum well structures. It is well known that molecular-beam epitaxy growth method is well suited to the fabrication of structures with various potential profiles. In this paper the interband two-photon transition rate in semiconductor quantum well with the modified Pöschl-Teller potential is calculated using second order perturbation theory. The calculation is performed within a two-band, isotropic, parabolic band model for semiconductor such CaAs , heavy holes as well as light holes are considered.

2. Method of calculation

For the confinement potential due to band-gap discontinuity we consider the modified Pöschl-Teller potential[7]:

$$U(z) = U_0 \left(1 - \frac{1}{ch^2 \alpha z}\right), \quad U_0 = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \lambda(\lambda + 1), \quad \lambda > 0, . \quad (1)$$

The envelope function and energy levels are solutions of the effective mass equation

$$\left(\frac{P_z^2}{2m} + U(z)\right) \varphi(z) = \varepsilon \varphi(z) \quad (2)$$

and can be written as

$$\varphi_\lambda^n(z) = \left(\frac{\alpha(\lambda - n)\Gamma(2\lambda - n + 1)}{\Gamma(n + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} P_\lambda^{n-\lambda}(th(\alpha z)) \quad (3)$$

$$\mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} (\lambda(\lambda + 1) - (\lambda - n)^2). \quad (4)$$

Here $P_\lambda^{n-\lambda}(th(\alpha z))$ is associated Legendre polynomial, $n = 0, 1, 2, 3, \dots, [\lambda], [\lambda]$ - integer part of λ , m is the electron effective mass.

The full electronic wave function and energy in the parabolic band approximation are given by

$$\psi_{n\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) \varphi_\lambda^n(z), \quad (5)$$

$$E_c = \mathcal{E}_n^c + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_\perp^2}{2m_c}, \quad E_v = -E_g - \mathcal{E}_n^v - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_\perp^2}{2m_v}, \quad (6)$$

where $u_0(\mathbf{r})$ is zone-center Bloch function, \mathbf{k}_\perp is the wave vector and \mathbf{r}_\perp is the position vector in the plane of the quantum well, E_g is the band gap. We use indices c and v to denote the conduction band and valence band respectively.

The electron – field interaction Hamiltonian can be expressed as:

$$\hat{H} = \frac{e}{m_0 c} (\mathbf{A}_1 \hat{p} + \mathbf{A}_2 \hat{p}), \quad (7)$$

where $\hat{p} = -i\hbar \nabla$ is the electron momentum operator, \mathbf{A}_1 and \mathbf{A}_2 are the vector potentials of the two monochromatic light waves. The vector potentials \mathbf{A}_1 and \mathbf{A}_2 can be taken in the form

$$\mathbf{A}_j = A_{0j} \exp(i\omega_j t) \boldsymbol{\xi}_j + c.c., \quad (8)$$

where $\boldsymbol{\xi}_j$ is the polarization vector of photon, $j=1,2$ and c.c. indicate the complex conjugate of the preceding expression.

We consider two-photon processes with the intermediate state in both the conduction band and the valence band. For such processes the two-photon transition rate can be represented in second order perturbation theory as

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e}{mc} \right)^4 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)^2 \sum_c \sum_v |M_{cv}|^2 \delta(E_c - E_v - \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2) \quad (9)$$

$$M_{cv} = \sum_i \left(\frac{P_{ci}^2 P_{iv}^1}{E_i - E_v - \hbar\omega_1} + \frac{P_{ci}^1 P_{iv}^2}{E_i - E_v - \hbar\omega_2} \right)$$

Here 1 and 2 refer to the two radiation fields of ω_1 and ω_2 respectively, P_{ci} or P_{iv} is the matrix element of the electron momentum between the wave functions (5).

The interband matrix element of momentum can be expressed as

$$\langle \psi_{nk_\perp}^c | \boldsymbol{\xi} \hat{p} | \psi_{n'k'_\perp}^v \rangle = (\boldsymbol{\xi} \mathbf{p}_{cv}) \delta_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}'_\perp} \langle \varphi_\lambda^{nc} | \varphi_\lambda^{n'v} \rangle \quad (10)$$

where $\mathbf{p}_{cv} = \langle u_0^c(\mathbf{r}) | \hat{p} | u_0^v(\mathbf{r}) \rangle$, the Kronecker symbol $\delta_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}'_\perp}$ expresses the momentum conservation law in one-photon interband transitions

The intraband matrix elements of momentum have different form for the light polarized in the plane of quantum well $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\xi_x, 0, 0)$ and for the light polarized in the direction of the growth axis $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(0, 0, \xi_z)$. These matrix elements can be written as

$$\langle \psi_{nk_\perp} | \xi_x \hat{p}_x | \psi_{n'k'_\perp} \rangle = \frac{m_0 \hbar}{m} k_x \delta_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}'_\perp} \delta_{nn'} \quad (11)$$

$$\langle \psi_{nk_\perp} | \xi_z \hat{p}_z | \psi_{n'k'_\perp} \rangle = \frac{m_0}{m} \delta_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}'_\perp} \langle \varphi_\lambda^n | \xi_z \hat{p}_z | \varphi_\lambda^{n'} \rangle \quad (12)$$

Calculation are performed for the case of equal photon energy $\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2$ and equal polarization vector $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2$. The independent contributions to the transition rate from the bands associated to heavy and light holes are considered. Numerical results are obtained for $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ quantum wells with various concentrations of aluminium x . The difference of the gap energies as a function of x is modelled by the formula [8] $\Delta E_g = (1087x + 438x^2)mev$ The values of the potential well depths U_{0c} and U_{0v} are 65 and 35% of ΔE_g respectively. We use the following parameters: the band gap of GaAs is $E_g = 1521mev$, $m_c = 0.067m_0$, $m_{lh} = 0.0905m_0$, $m_{hh} = 0.377m_0$.

3. Results and Discussion

In Fig.1 the two-photon transition rate in a $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ quantum well with modified Pöschl-Teller potential is shown as a function of the two-photon energy $2\hbar\omega$ both for the light polarized perpendicular a),b) and parallel c),d) to the direction of the growth axis.

For the light polarized perpendicular to the direction of the growth axis the possible two-photon transitions are the transitions of the allowed-forbidden type which occur between valence and conduction subbands of the same index n . The transition rate grows continuously with photon

energy what is caused by the linear dependence of the intraband transition matrix elements on the in-plane wave vector \mathbf{k}_\perp .

As observed from Fig.1a) the two-photon transition rate increases with an increase in the parameter λ at the same value of Al concentration x . This can be explained by increasing in density of states with the increase in the parameter λ (i.e. number of subbands between which the transitions occur).

The decrease of the two-photon transition rate with an increase in Al concentration x at the same λ (Fig.1b)) is because of the proportionality $W \sim \sum_{\mathbf{k}_\perp} \mathbf{k}_\perp^2 \sim (\hbar\omega - E_g - \varepsilon_n^c - \varepsilon_n^v)$ due to the dependence of intraband matrix element on wave vector in (11). The quantum well depths U_{0c} and U_{0v} , the parameters α_c and α_v and, as seen from (4), the subband energies ε_n^c and ε_n^v increase with the increase in Al concentration x . Therefore when Al concentration increases the difference $(\hbar\omega - E_g - \varepsilon_n^c - \varepsilon_n^v)$ and the transition rate decrease.

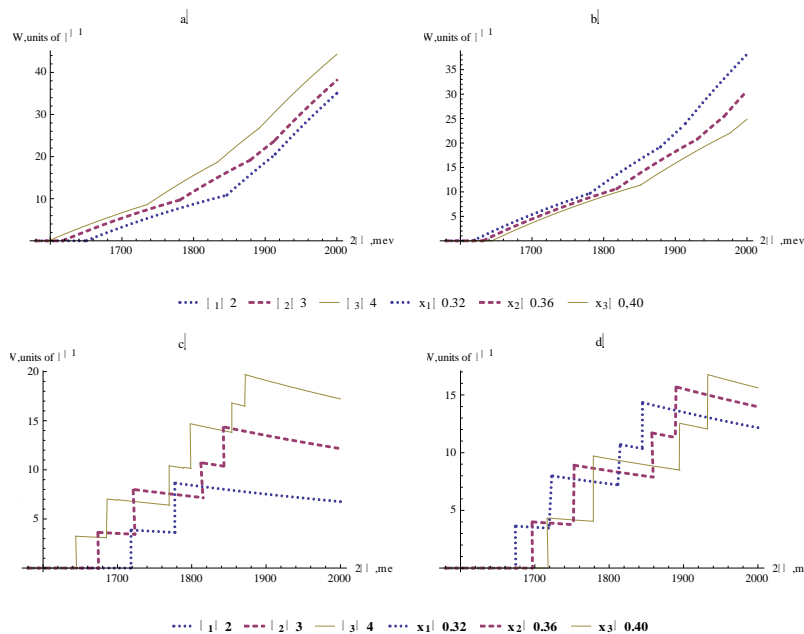
For the light polarized in the direction of the growth axis the matrix elements for intraband transitions are \mathbf{k}_\perp -independent(12), that leads to the step like density of state features for the transition rate dependence on photon energy Fig 1c),d). In this case only light holes contribute to two-photon absorption and the transitions occur between any two subbands quantum number of which differs by an odd integer.

The threshold for the two-photon absorption is shifted towards lower energies both with the decrease in Al concentration x and increase in λ at the same value of x because of the effective band gap decrease.

Fig.1 Two-photon transition rate in a $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ quantum well with modified Pöschl-Teller potential is shown as a function of the transition energy. a) and b) Radiation polarized in the plane of the quantum well,

c) and d) Radiation polarized along the growth axis. The units of the transition rate is $\tau^{-1} = \left(\frac{e}{c}\right)^4 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)^2 \frac{S}{m\hbar^3}$.

The transition rate calculated for Al concentration $x=0.32$ and for different values of parameter λ (a), c)) and with $\lambda=3$ for Al concentration $x=0.32, 0.36, 0.4$ (b), d)).



4. Conclusion

We have calculated two-photon interband transition rate in quantum well with modified Pöschl-Teller potential. The selection rules obey the condition $\Delta n = 0$ for the subband quantum number and the transition rate increases continuously with photon energy for the light polarized in the plane of the quantum well, Δn is equal to odd integer and the transition rate is non-monotonic function of the photon energy for light polarized along the growth axis. The spectra shape becomes more structured when the number of subbands increases. For the light polarized perpendicular to the growth axis the two-photon transition rate increases both with the increase in the number of subbands and decrease in quantum well depth. The threshold for the two-photon absorption is shifted towards the lower energies both with decrease in Al concentration x and increase in number of subbands at the same value of x

REFERENCES

1. H.N.Spector, Two-photon absorption in semiconducting quantum-well structures. *Phys.Rev.B* 35, 5876 (1987).
2. A.Pasquarello and A.Quattropani, Gauge-invariant two-photon transitions in quantum wells. *Phys.Rev.B*38, 6206 (1988).
3. D.Frohlich, R.Wille, W.Schlapp, and G.Weinmann, *Phys. Rev.Lett.*61, 1878 (1988).
4. H.S.Pattanaik, M.Reichert, J.B.Khurgin, D.J.Hagan, E.W.Van Stryland, Enhancement of Two-Photon Absorption in Quantum Wells for Extremely Nondegenerate Photon Pairs. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.52, 3, (2016).
5. Georgi L.Dakovski and Jie Shen, Size dependence of two-photon absorption in semiconductor quantum dots *Journal of Applied physics*, (114) 014301, (2013).
6. D.Duchesne, L.Razzari, L.Halloran, R.Morandotti, A.J.SpringThorpe, D.N.Christodoulides and D.J.Moche, Two photon photodetector in a multiquantum well GaAs lasers structure at 1.55 μm . *Opt.Express*, vol.17, no7, pp.5298-5310, (2009).
7. S.Flugge. *Practical Quantum Mechanics I*, Springer-Verlag, Berlin-Heydelberg-New York, (1971).
8. P.A.Belov and E.S.Khramtsov, The binding energy of excitons in narrow quantum wells. *Journal of Physics, Conf.Series* 816, 012018, (2017).

UOT: 537.311PACS: 71.20. Nr, 72.20.Ee, 72.20.Fr, 72.20.Ht

OPTICAL PROPERTIES OF SOLID SOLUTIONS OF TlInS_2 - TlInSe_2 SYSTEM IN FUNDAMENTAL ABSORPTION REGION

R.M. SARDARLY, N.A. ALIYEVA, F.T. SALMANOV, A.J. MIKAYILOVA, M.Y. YUSIFOV

Institute of Radiation Problems of ANAS,
Baku/ AZERBAIJAN

ABSTRACT

In spectral area 400-1100 nm for TlGaSe_2 - TlInS_2 solid solution sistem transmittance and reflection spectra are investigated. In the field of fundamental optical absorption spectra the energy of direct and indirect transitions for all crystals of solid solutions are calculated. It is established, that with growth x , in the field of solubility of a solid solution, the width of the forbidden zone of crystals grows also.

Key words: absorption spectra, direct and indirect transitions, forbidden zone, solid solution.

FUNDAMENTAL UDMA OBLASTINDA (TlInSe_2)_{1-x}(TlInS_2)_x SİSTEMİ BƏRK MƏHLULLARININ OPTİK XASSƏLƏRİ XÜLASƏ

(TlInSe_2)_{1-x}(TlInS_2)_x sistemi bərk məhlullarında otaq temperaturunda 400–1100 nm spektral diapazonunda əks olunma və buraxma spektrlərindən düzünə və çəpinə qadağan olunmuş zolağın eninin konsentrasiyadan asılılığı təyin olunmuşdur. Müəyyən edilmişdir ki, (TlInSe_2)_{1-x}(TlInS_2)_x sistemi bərk məhlullarda konsentrasiyanın qiyməti artdıqca qadağan olunmuş zonanın eni də artır.

Acar sözlər: udma spektri, düzünə və çəpinə keçid, qadağan olunmuş zolağın eni, bərk məhlul.

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ (TlInSe_2)_{1-x}(TlInS_2)_x В ОБЛАСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ РЕЗЮМЕ

В спектральной области 400-1100 nm исследованы пропускание и отражение системы твердых растворов (TlInSe_2)_{1-x}(TlInS_2)_x. В области фундаментального оптического поглощения рассчитаны энергии прямых и непрямых переходов для всех составов твердого раствора. Установлено, что с ростом x , в области растворимости твердого раствора, растет и ширина запрещенной зоны кристаллов.

Ключевые слова: спектры поглощения, прямые и непрямые переходы, ширина запрещенной зоны, твердый раствор.

Introduction

TlInS_2 crystal which belongs to the family of $A^{\text{III}}B^{\text{III}}C_2^{\text{IV}}$ compound crystallizes in monoclinic system and TlInSe_2 from the same group crystallizes in tetragonal system and lattice periods for TlInSe_2 are as $a=b=8,075\text{Å}$, $c=6,847\text{Å}$ and for TlInS_2 $a=b=10,94\text{Å}$, $c=15,18\text{Å}$, $\beta=100.21$, $z=16$, space group C_{6h}^2-C2/c [1, 2].

It should be mentioned that, TlGaSe_2 , TlGaS_2 , TlInS_2 , TlInSe_2 and TlInTe_2 crystals allow conducting replacement between Ga and In cations and among Se, S and Te anions and therefore, form a continuous series of $\text{TlInS}_{2(1-x)}\text{Se}_{2x}$, $\text{TlIn}_x\text{Ga}_{1-x}\text{S}_2$, $\text{TlIn}_x\text{Ga}_{1-x}\text{Se}_2$ etc. mixed crystals (solid solutions) in all concentrations range ($0 < x < 1$). In these compounds there is observed a change in lattice parameters depending on x . Also, though the first and last member of the series belong to different symmetry and space group (e.g. monoclinic TlGaSe_2 and tetragonal TlInSe_2), transition from monoclinic phase to tetragonal one occurs in some values of x . Changes in lattice parameters of $\text{TlGa}(\text{S}_{1-x}\text{Se}_x)_2$, $\text{TlInS}_{2(1-x)}\text{Se}_{2x}$ crystals which are layered mixtures depending on the content have been studied in [3,4].

In the work [5] it has been shown that, the structure of energy band, electric and vibration spectrum in $A^{III}B^{III}C_2^{IV}$ compounds have strong anisotropy. Optical and photoelectric properties of $TlInSe_2$ and $TlInS_2$ have been studied in [6,7]

The main aim of the research is to study the optical properties of solid solutions of $TlInS_{2(1-x)}Se_{2x}$ system in fundamental absorption range within isomorphous, as well as cation-anion replacement.

Experimental details

$(TlInSe_2)_{1-x}(TlInS_2)_x$ solid solution samples were grown by the modified Bridgman-Stockbarger method. The mixture of stoichiometric was put into the quartz ampoule which subsequently was sealed under a vacuum of 10^{-6} mbar. A quartz crucible with carbon coating was used, 10 mm in diameter and about 25 mm in length. The X-ray reflection method was used to test the crystallinity of the prepared samples. Absorption spectra were measured on freshly cleaved planes (001) surfaces.

Measurement of emission spectrum has been carried out by means of "specord 210 plus" spectrophotometer at 400-1100 nm spectral range and by ELC polarization. The measurements have been conducted at room temperature. Measurement accuracy of the spectrometer has been within ± 3 nm. According to it, E_g is calculated up to $\pm 0,0004$ eV with better accuracy.

Results and discussion

Using the reference [8], the absorption rate can be written as follows

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \left(\frac{(1-R)^2 + [(1-R)^4 + 4R^2T^2]^{\frac{1}{2}}}{2T} \right) \quad (1)$$

Here R is reflection (0,2605⁽²²⁾), A-optical density, α -optical absorption rate, and d is the thickness of the sample. The optical absorption rate has been determined by using the value of R at room temperature. Reflection measurements have been carried out in the samples obtained from natural layers by breaking into pieces and thickness of the samples satisfies $\alpha d \gg 1$. In order to eliminate a number of reflection and interference, we insert the light falling on the crystal into the crystal at a small angle. The thickness of the samples used in the experiment has been taken as about $d \approx 300 \mu m$.

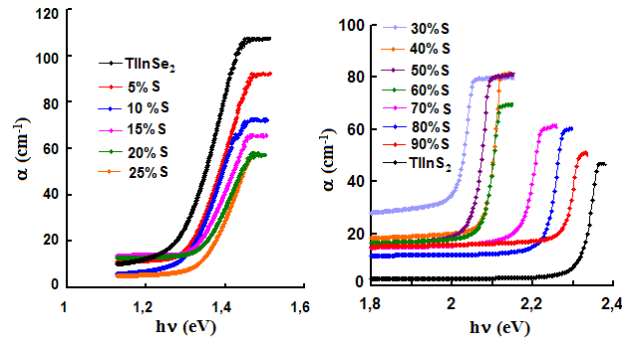
As mentioned above, the fundamental absorption rate in most semiconductors obeys the following equation [9]

$$\alpha \hbar \omega = B(\hbar \omega - E_g)^n \quad (2)$$

here $\alpha \hbar \omega$ is absorption rate, $\omega = 2\pi\nu$ -angular frequency, n-constant and n index can get the values of 1/2, 3/2, 2 and 3, the nature of the dependence depends on absorption spectrum of electronic transition. In high energy spectrum range $n=1/2$ indicates the direct allowed transition, $n=3/2$ - forbidden direct transition, at low energy spectrum range $n=2$ shows the sidewise allowed transition and $n=3$ - forbidden sidewise transition [9].

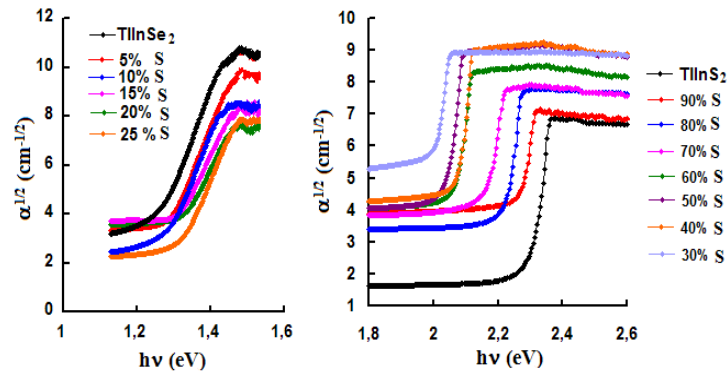
In fig.1, it was shown absorption of spectrum of $(TlInSe_2)_{1-x}(TlInS_2)_x$ ($x=0 \div 1,0$) system at room temperature. According to experimental results, at 300K temperature the absorption rate is 10 cm^{-1} and 120 cm^{-1} in solids of $(TlInSe_2)_{1-x}(TlInS_2)_x$ ($x=0; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25$) system and 5 cm^{-1} and 80 cm^{-1} in solids of $(TlInSe_2)_{1-x}(TlInS_2)_x$ ($x=0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$).

Fig.1. Typical absorption spectra at 300 K for $(\text{TlInSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ ($x=0\div 1,0$) samples



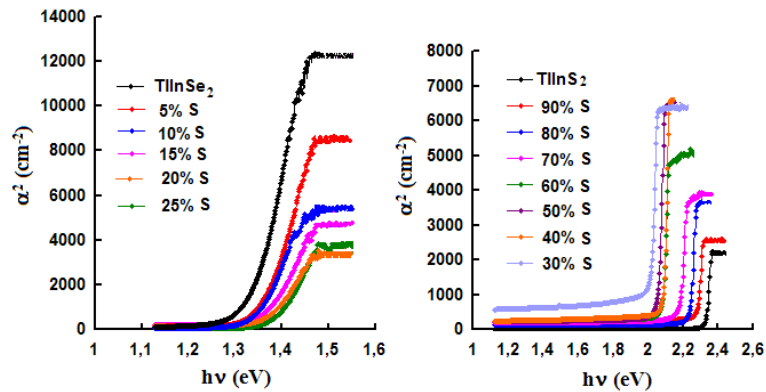
For the studied $(\text{TlInSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ solid solution samples it has been determined direct and sidewise optical absorption energy transition of band gap. These transitions are obtained from extrapolation of low fragmentary part of direct line to the values of $\alpha^2=0$ and $\alpha^{1/2}=0$ using dependences $(\alpha^{1/2}-\hbar\omega)$ and $(\alpha^2-\hbar\omega)$, respectively (fig.2, fig. 3).

Fig.2. The indirect absorption spektra versus photon energy for $(\text{TlInSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ ($x=0\div 1,0$) samples



The values of direct and sidewise energy transitions have been determined for the samples of $(\text{TlInSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ ($x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$) and their change depending on concentration has been given in table 1. The results are consistent with literature data [3,10].

Fig.3 The direct absorption spektra versus photon energy for $(\text{TlInSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ ($x=0\div 1,0$) samples



Əlavə olaraq $(\text{TlInSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ ($x= 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$) nümunələri üçün qadağan olunmuş zolağın eninin konsentrasiyadan asılılıq əyrisi qurulmuşdur və şəkil 5 – də verilmişdir.

As it is seen from the dependence of absorption rate on photon energy, the linear absorption varies significantly in mixtures comparing with TlInSe_2 and TlInS_2 in the studied solids.

Table. Direct and indirect band gap values of $(\text{TlInSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ ($x=0+1,0$) samples

	E_{gd}	E_{gi}
TlInSe₂	1,33	1,19
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,05)	1,34	1,20
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,1)	1,345	1,20
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,15)	1,351	1,22
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,2)	1,352	1,22
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,25)	1,38	1,24
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,3)	2,025	1,98
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,4)	2,05	2,01
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,5)	2,08	2,05
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,6)	2,08	2,05
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,7)	2,18	2,11
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,8)	2,25	2,2
TlInS ₂ (1-x)Se _{2x} (x=0,9)	2,28	2,23
TlInS₂	2,32	2,28

Conclusion

It has been determined the dependence of direct and sidewise band gap width on concentration from reflection and transmission spectra in 400-1100 nm spectral region at room temperature in solid solutions of $(\text{TlInSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ system. It has been established that, with increasing concentration in solid solutions of $(\text{TlInSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ system the band gap width also increases.

REFERENCES

1. KASHIDA S AND KOBAYASHI Y. X-RAY STUDY OF THE INCOMMENSURATE PHASE OF TlInS_2 // J.PHYS.: CONDENS. MATTER 11 (1999)1027.
2. Henkel W, Hochheimer H D, Carlone C, Werner A, Yes S and Schnering H G. High-pressure Raman study of the ternary chalcogenides TlGaS_2 , TlGaSe_2 , TlInS_2 and TlInSe_2 // Phys, Rev. B 26, (1982) 3211.
3. Gasanly N.M, Ozkan H and Culfaz A. Composition variations of lattice parametrs of $\text{TlGa}(\text{S}_{1-x}\text{S}_x)_2$ // Phys. Status Solidi a 140 K1(1993)
4. Hatzisymeon K G, Kokkou S C, Anagnostopoulos A N and Rentzeperis P İ. X-ray diffraction study of the crystal structure of the Tl ternary chalcogenides $\text{TlIn}_2(1-x)\text{Se}_2$, $x=0.2, 0.3, \dots, 0.9$ // Acta Crystallorg. B 54 (1998) 35.
5. Abdullaeva S.G., Belenky G.L., Mamedov N.G. Near-band-edge optical properties of $\text{TlGaS}_2x\text{S}_2(1-x)$ // Phys. Stat. Sol. (b) K19, 1980, 102
6. Shim Y., Okada W., Wakita K., Mamedov N. Refractive indices of layered semiconductor ferroelectrics TlInS_2 , TlGaS_2 , TlGaSe_2 from ellipsometric measurements limited to only layer-plane surfaces // J. Appl. Phys. 102, (2007) 083537
7. Gurbulak, S. Duman. Urbach tail and optical characterziation of gadolinium – doped TlGaSe_2 single crystals // Phys. Scr. 77, (2008) 025702
8. Moss T.S., Optical Process in Semiconductors. Butterworths, London. 1959, 247.
9. Pankove J.İ. Optical Process in Semiconductors. New York: Dover, 1975, 35
10. Abdullaeva S.G., Belenky G.L., Mamedov N.G. Near-band-edge optical properties of $\text{TlGaS}_2x\text{S}_2(1-x)$ // Phys. Stat. Sol. (b) K19, 1980, 102

UOT: 523PASC:96.25.-f

DISTRIBUTION OF PARAMETERS OF LONG-PERIOD COMETS IN PHASE OF THE 11-YEAR SOLAR ACTIVITY CYCLE:

A. S. QULIYEV, H.A. QASIMOV, T. FƏRHADOVA

Shamakhi Astrophysical Observatory, Baku Engineering University

Azerbaijan State Pedagogical University

quliyevayyub@gmail.com, hqasimov@beu.edu.az, tferhadova@gmail.com

ABSTRACT

The dates of the discovery of long-period comets have orbital periods longer than 200 years are observed depending on the phase of the 11-year solar activity (SA) cycle. The analysis covers 852 comets observed in the 1-23 SA cycles. According to the opening dates, phases of solar activity are determined and their statistical analysis is provided. It's established that in this distribution earlier noticed bimodality is confirmed. These maximums correspond the middle cycles of rise and fall of the SA. It was concluded, that long period comets react more to the components of the solar radiation, where intensity of some of them have bimodal character within 11-year SA cycle. There is a need of a separate studying of periodic comets and other comet groups from the analytic point of view.

Key words: solar activity, long-period comets, observed dates.

GÜNƏŞ AKTİVLİYİNİN 11-İLLİK DÖVRÜNƏ GÖRƏ UZUN-PERİODLU KOMETLƏRİN PARAMETRLƏRİNİN TƏYİNİ

XÜLASƏ

Bu işdə periodu 200 ildən çox olan uzun-periodlu kometlərin Günəş aktivliyinin 11-illik fazasına görə tapılması vaxtlarına baxılır. Tədqiqat Günəş aktivliyinin 1-23 fazası zamanı müşahidə olunan 852 kometi əhatə edir. Kəşf tarixlərinə görə Günəş aktivliyinin fazası müəyyən olunur və kometlərin statistik analizi aparılır. Kometlərin kəşf tarixləri fazanın əvvəlcədən qeyd olunan iki maksimumluğunu təsdiq edir. Bu maksimumlar Günəş aktivliyi fazasının ortasına – qalxma və enməyə intervallarına uyğun gəlir. Bu nəticəyə gəlinmişdir ki, uzun-periodlu kometlər Günəş aktivliyinin 11-illik fazasının iki maksimum dövründə daha çox aktivləşirlər. Çünki, bu dövrdə kometlər daha çox Günəş şüalarının təsirinə məruz qalırlar. Digər tərəfdən periodik kometləri və digər qrup kometləri də bu nöqtəyi-nəzərdən öyrənmək vacib hesab olunur.

Açar sözlər: günəş aktivliyi, uzun periodlu kometlər, müşahidə tarixləri.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИХ КОМЕТ ПО ФАЗАМ 11-ЛЕТНЕГО ЦИКЛА СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

РЕЗЮМЕ

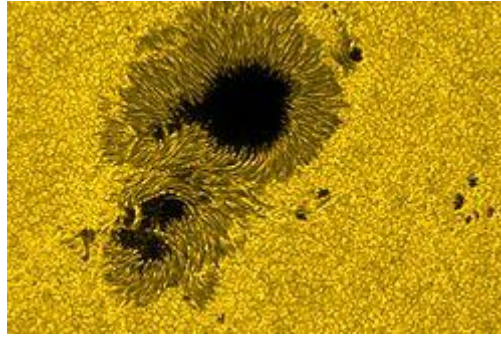
Рассматриваются даты открытия долгопериодических комет с периодом обращения больше 200 лет в зависимости от фазы 11-летнего цикла солнечной активности (СА). Анализ охватывает 852 кометы, наблюдавшихся за 1-23 циклов СА. По датам открытия определены фазы СА и проведен их статистический анализ. Установлено, в их распределении ранее замеченная двухвершинность подтверждается. Эти максимумы соответствуют середине периодов подъема и спада СА. Сделан вывод о том, что долгопериодические кометы больше реагируют на те составляющие солнечного излучения, интенсивность которых имеет двухвершинный характер в течение 11-летнего цикла СА. Есть необходимость отдельного изучения периодических комет и других кометных групп с аналогичной точки зрения.

Ключевые слова: солнечная активность, долгопериодические кометы, даты открытия.

Giriş

Kometlərin müşahidə olunma saylarındakı artım Günəş aktivliyinin 11-illik dövrü (tsikli) ilə müəyyən qanunauyğunluq təşkil edir. Odur ki, Günəşin özündə gedən proseslər və onun fəal törəmələrindən biri olan Günəş ləkələrini tədqiq etmək vacib məqamlardan sayılır. Günəş ləkələri Günəşin ən xarakterik fəal törəmələrindən biridir. Bunun səbəbləri çoxdur. Hər şeydən

əvvəl ləkələr Günəşin ümumi fəallığını müəyyən edir. Ləkələr Günəş fotosferində Günəş diskində əmələ gəlirlər. Əvvəlcə onlar nöqtəvi formada olur və zaman keçdikcə böyüyür, bir neçə sutkadan bir neçə aya qədər ilk ləkə əmələ gələn oblastda ləkə əmələgəlmə, inkişaf etmə və yox olma prosesi davam edir. Ləkələr adətən qrup şəklində yaranırlar. Hər qrupda çox vaxt iki və daha çox ləkə olur. Qrupun sağ tərəfindəki ləkə, yəni fırlanan Günəş səthində qərb tərəfdə - irəlində gedən ləkə baş ləkə, diskin sol tərəfindəki ləkə, yəni arxada gedən ləkə quyruq ləkə adlanır. Baş və quyruq ləkələrin ətrafında xırda ləkələr də olur. Baş ləkə daha böyük sahəyə malik olur və ən axırda yox olur. Ən böyük ləkənin xətti ölçüsü 10^5 km-ə çata bilər. Ləkələr üçün əsas xarakterik cəhət onların güclü maqnit sahəsinə malik olmasıdır. Günəş ləkələrində maqnit sahəsinin gərginliyi bəzən 4500 E-ə çatır. Halbuki, Günəşin ümumi maqnit sahəsinin gərginliyi 1 E-dir. Bu göstərir ki, maqnit sahəsi Günəşin bütün dərinliklərini əhatə etmir – maqnit sahəsi Günəşin konvektiv zonası ilə əlaqədardır. Müşahidələr göstərir ki, maqnit sahəsi ləkənin mərkəzi hissəsində ən böyükdür, kənarlara doğru sahə zəifləyir. Ləkənin fotosəklindən görünür ki, onun mərkəzi hissəsi çox tutqun, kənarları isə nisbətən az tutqun və şüa quruluşudur.



Ləkənin ən tutqun mərkəzi hissəsi ləkənin nüvəsi, az tutqun kənarları isə yarımkölgəsi adlanır. Ləkələr Günəşin ancaq $\pm 40^\circ$ helioqrafik enliklər arasındakı zolaqlarda müşahidə olunur. Ləkələrin XVII yüzilliyin əvvəllərindən aparılan müşahidələri göstərmişdir ki, onların Günəş səthində görünməsi müəyyən qanunauyğunluğa malikdir. Ləkə əmələgəlmə fəaliyyəti W -Volf ədədi ilə təyin olunur.

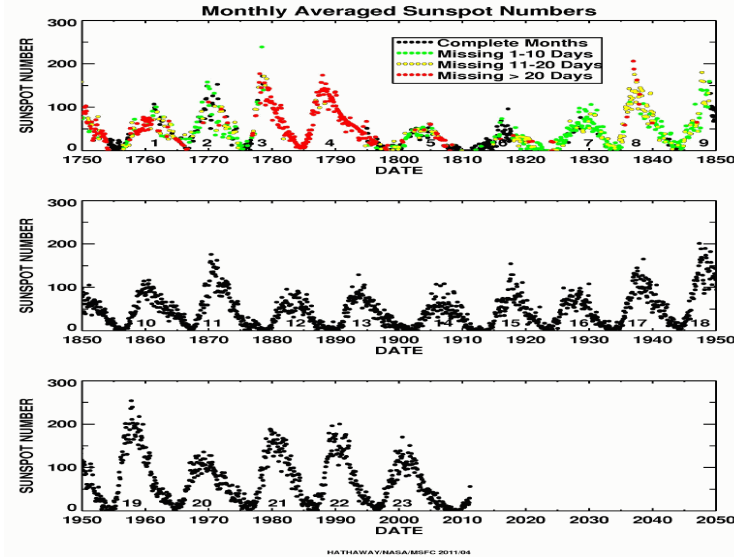
$$W = 10g + f$$

Burada g -ləkə qruplarının sayı, f – bütün ləkələrin ümumi sayıdır. Odur ki, Günəşdə ləkə yoxdursa $W = 0$, bir ləkə varsa, onda $W = 11$ olar, çünki yeganə ləkə həm bir qrup, həm də ləkənin özü hesab edilir. Günəşin səthində iki ləkə qrupu, qruplardan birində iki ləkə, digərində isə beş ləkə vars onda $W = 10 \times 2 + 7 = 27$ alınır. Ləkə əmələgəlmə fəaliyyətində aşağıdakı qanunauyğunluqlar vardır.

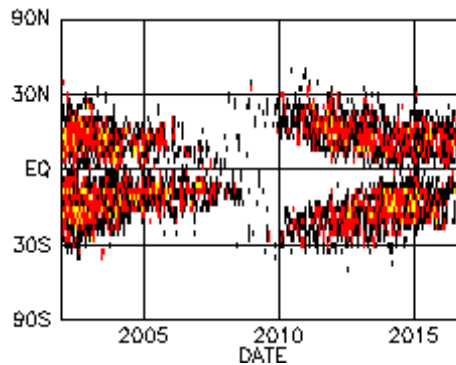
1. Əsri ortalaşdırmaya görə müəyyən edilmişdir ki, ləkələrin sayı 11 illik dövrlə dəyişir. Günəş aktivliyinin minimumunda Günəşdə aylarla heç bir ləkə müşahidə olunmaya bilər, sonra ləkələrin sayı və onların sahəsi artır. 4-5 ildən sonra ləkələrin sayı və sahəsi maksimuma çatır və bu dövr, Günəş aktivliyinin maksimum dövrü adlanır. Aylarla Günəş maksimum aktivliyində qalır, sonra ləkələrin sayı tədricən azalır və 6-7 ildən sonra yenidən minimum olur. Qrafikdə orta illik Volf ədədinin 1750 – 2010 cu illər üzrə dəyişməsi göstərilmişdir.

2. Günəş aktivliyinin hər yeni dövrü minimum mərhələdən başlayır. Hər yeni tsikldə ləkə əvvəlcə Günəş ekvatorundan uzaqda yaranır. Dövr ləkələrin ən böyük helioqrafik enliklərdə $\pm 30^\circ$ - 40° görünməsi ilə başlayır, bundan sonra ləkələrin sayı və sahəsi artır, eyni zamanda ləkə

əmələgəlmə prosesi Günəş ekvatoruna yaxınlaşır, ləkələrin maksimum sayı adətən $\pm 15^\circ$ -lik helioqrafik enliklərdə olur, sonra ləkələrin sayı azalır, eyni zamanda ləkə əmələgəlmə prosesi ekvatora tərəf sürüşür, ekvator yaxınlığında $\pm 5^\circ$ -dək ləkələrin əmələgəlməsi, aktivliyin minimum dövrü ilə tamamlanır, sonra yeni dövr başlayır.



Komet parametrlərinin Günəş aktivliyi fazasından, yəni (F)-dən asılılığı məsələsi uzun bir tarixə malikdir. Birinci dəfə belə asılılıq Link və Vanusek [1] kimi müəlliflərin işlərində müzakirə olunmuşdur. Daha sonra Dobrovolski[2], Sekanın[3] və digər alimlərin elmi işlərində bu mövzunun işlənməsi davam etdirilmişdir. Qeyd etdiyimiz alimlər göstərmişdir ki, komet parametrlərinin bəziləri (ildə kəşf olunma sayları, mütləq ulduz ölçüsü, fotometrik göstəricilər və s.) Günəş aktivliyinin 11-illik fazasında iki maksimumlu paylanma göstərir. Maksimumlardan biri orta illik Volf ədədinin dəyişmə qrafikində qalxma dövrünə, ikincisi isə düşməyə uyğun gəlir. İlk dəfə Quliyev [4] göstərmişdir ki, periodik kometlər olan Yupiter ailəsi bu mənada fərqlənirlər. Bu kometlərin parametrlərinin paylanması Volf ədədinə görə bir maksimumludur. Parametrlərin təyini üçün Quliyev aşağıdakı düsturdan istifadə etmişdir.



$$F = \begin{cases} \frac{t-T_{max}}{T_{max}-T_1}; & \text{əgər } t - T_{max} > 0 \\ \frac{t-T_{max}}{T_2-T_{max}}; & \text{əgər } t - T_{max} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Burada t-kometin tapılma tarixi, T_1 , T_2 və T_{max} -11 illik Günəş aktivliyi dövrlərinin maksimum və minimum vaxtlarıdır. Xatırlatmaq lazımdır ki, Dobrovolskinin və Sekanınin işlərində daha sadə düsturdan istifadə edilmişdir.

$$F = (t-T_1)(T_2-T_1) \quad (2)$$

Bu düstürlə hesablama aparmaqda əsas narahatçılıqdan biri Günəş aktivliyi əyrisinin qeyr-simmetrikliliyi ilə bağlıdır. Məlumdur ki, 11-illik dövr zamanı qalxma periodu enmə periodundan 1,5 dəfə azdır. Bu vəziyyətdə qeyri-simmetriklilik tsikldən tsiklə dəyişir. (2) ifadəsi Günəş aktivliyinin maksimum dövrünü nəzərə almır. Bu Günəş aktivliyinin maksimum dövründə gedən proseslərin tədqiqində qeyr-müəyyənlik yaradır.

Quliyev [5] isbat etmişdir ki, komet saylarının $N(F)$ fazadan asılılığında bəzi məqamlar vardır ki, onlar təmiz kosmoqonik xarakter daşıyırlar. Məsələn, periodik kometlərin içərisində elə kiçik qruplar vardır ki, $N(F)$ asılılığı uzun-periodlu kometlərdə olduğu kimidir. Əksinə uzun-periodlu kometlər içərisində elə kiçik qruplar müşahidə olunur ki, onlarda $N(F)$ asılılığı periodik kometlərdə olduğu kimi bir maksimumludur. Xatırlatmaq lazımdır ki, Quliyevin[5] işlərində Günəş aktivliyinin 0-22 dövrünün komet məlumatlarından istifadə olunmuşdur.

İşin məqsədi və tədqiqat obyektləri

Hazırkı işdə Günəş aktivliyinin 0-23 dövründə uzun-periodlu kometlərin $N(F)$ asılılığını tədqiq etmək məqsədi qoyulur. $N(F)$ asılılığının ümumi analizindən başqa, bu asılılıq tək və cüt Günəş aktivliyi dövrləri üçün də öyrəniləcək.

Hesablamalar 1755-2009-cu illərdə müşahidə olunmuş 852 kometi əhatə edir. Cədvəl uyğun olaraq C/1757 R1 kometi ilə başlayır və C/2008 Y3 kometi ilə tamamlanır. Burada yaxın kometlər, yəni əkiz və ya hər hansı bir ailəyə məxsus kometlər hesablamalarda nəzərə alınmamışdır.

Cədvəl 1. 852 uzun-periodlu kometlərin $N(F)$ asılılığı.

	İnterval F									
	0-0.1	0.1-0.2	0.2-0.3	0.3-0.4	0.4-0.5	0.5-0.6	0.6-0.7	0.7-0.8	0.8-0.9	0.9-1
N	51	63	81	48	60	97	99	123	116	114

Cədvəl 1-dən görünür ki, bir-çoxışlərdə olduğu kimi $N(F)$ asılılığı iki maksimumluğa saxlanmışdır. İntervalın 0.2 – 0.3 aralığında 81 komet, 0.7 – 0.8 intervalında 123 komet tapılmışdır. F-in interval sərhədlərindəyişərəkətraflıanalizetdikdəgörürükki, 0.16 – 0.26 (94 kəşf) və 0.74 – 0.84 (136 kəşf) intervallarında daha çox komet müşahidə olunmuşdur.

Günəş aktivliyi dövrünün maksimumundan əvvəl və sonra kometlərin müşahidə olunma sayları bu cədvəlin məlumatlarına əsasən bəzi təhlillər aparılmalıdır. 1755 – 2009-cu illər ərzində Günəş aktivliyi dövrünün maksimumundan əvvəlki dövr 97,78 il, maksimumdan sonrakı dövr 156,02 il təşkil edir. Bu illərin nisbətləri 1,62 –yə bərabərdir.

Maksimumdan sonrakı dövrə aid rəqəmlərin müqayisəsi zamanı alınan nəticə bu əmsala vurulmalıdır. Bu faktın nəzərə alınması maksimumdan sonra tapılan kometlərin sayı maksimumdan əvvəl tapılan kometlərindən bir az yüksəkdir. (353 kometə qarşı 312 komet).

Günəş aktivliyinin cüt və tək dövrlərinin ayrıca analizi böyük maraq kəsb edir. Həmin analizin nəticələri cədvəl 2-də verilmişdir.

Cədvəl 2. 852 uzun-periodlu kometlərin cüt və tək dövrlərə görə $N(F)$ asılılığının təyini.

F	0-0.1	0.1-0.2	0.2-0.3	0.3-0.4	0.4-0.5	0.5-0.6	0.6-0.7	0.7-0.8	0.8-0.9	0.9-1
$N_{\text{tək}}$	32	38	52	30	40	66	61	79	73	70
$N_{\text{cüt}}$	19	25	29	18	20	31	38	44	43	44

Verilmiş cədvəldən görünür ki, $N(F)$ asılılığın iki maksimumlu paylanması tək dövrlərdə daha çox müşahidə olunur. 0.2 – 0.3 və 0.7 – 0.8 intervalında iki maksimumluq daha çox müşahidə olunur. (52 və 79 komet). Tək dövrlərdə 0.2-0.3 və 0.7-0.8 intervalında iki maksimumluq müşahidə olunsada cüt dövrlərdə bu çox zəifdir.

Nəticələr və müzakirələr

Məlumdur ki, Günəş aktivliyi yaxın heliosentrik məsafələrdə daha intensiv hiss olunur. Son on illiklərdə uzun-periodlu kometləri daha uzaq məsafələrdə müşahidə etmək olur. Buna səbəb müşahidə vasitələrinin və teleskopların keyfiyyətlərinin artmasıdır. Kosmik tədqiqatların yeni mərhələyə qədəm qoyması Dobrovolskinin, Sekaninin və digər müəlliflərin işlərində $N(F)$ asılılığın iki maksimumluq məsələsi zəifləməli və tamamilə itməli idi. Lakin bu məsələ öz mövqeyini qoruyub saxlayır. Bu bizə onu göstərir ki, burada xarici faktorlar da öz rolunu oynayır. Deməli proses təkcə kometin fiziki xüsusiyyətləri ilə məhdudlaşmır. Komet nüvələri Günəş işıqlarına həssasdırlar və həssaslıq Günəş aktivliyi dövrünün iki maksimumunda daha da intensivləşir.

Göründüyü kimi, bu nöqteyi-nəzərdən baxsaq periodik kometləri də ayrıca tədqiq etmək çox mühimdir. Ona görə ki, qısa-periodlu kometlər Günəş sisteminə daha yaxın bölgələrdən, məsələn Kuper-Belt qurşağından gəlirlər. Bu yaxınlarda Svoren [6] tərəfindən nəşr olunan işdə bu məsələ yenidən tədqiqat obyektinə olmuşdur. Biz növbəti işimizdə periodik kometləri bu kontekstdən tədqiq edəcəyik.

ƏDƏBİYYAT

1. Link and Vanusek, 1947, CR 225, 1284
2. Добровольский О. В., 1966. Кометы. М.: Наука. –288 с.
3. Sekanina Z. 1962. An analysis of some problems of cometary physics based on photometric data. The c.sc. thesis. Prague. 563P.
4. Гулиев А. С., 1985. О влиянии солнечной активности на открытие короткопериодических комет. Проблемы косм. физики. –20. – с. 39–43.
5. Гулиев А. С., 1990. О распределении кометных параметров по одиннадцатилетнему циклу солнечной активности // Кинематика и физика небесных тел. – т.6., 4. – с. 68–73.
6. Svoren Y. 2015 Distribution of brightenings of periodic comets during solar activity cycles 9–22. *Planetary and Space Science*, V. 118, p. 176-180

UOT 621.315.592PACS: 61.05.-a

INVESTIGATION OF $K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ CRYSTAL USING X-RAY AND OPTICAL MICROSCOPIC METHODS

R.B. BAIRAMOV¹, V.I. NASIROV², E.V. NASIROV³

¹Baku Engineering University

²Azerbaijan State Pedagogical University

³Azerbaijan High Military School named after H.Aliyev

rabayramov@beu.edu.az

ABSTRACT

$K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ monocrystal was cultivated and studied from room temperature to melting temperature by optical microscopy and high temperature x-ray methods. It has been established that there are two different polymorphic modifications in the crystal in the study temperature range. For the temperature dependence of the II \leftrightarrow III transition rate, the $\vartheta = (-0,2863\Delta T + 0,5593\Delta T^2 + 0,01003\Delta T^3) \cdot 10^{-2}$ cm/sec experimental dependence was found and II \leftrightarrow III transition activation energy ($E_{II\leftrightarrow III} = 100,8$ kC/mol) was calculated.

Key words: crystal, monocrystal, polymorphism, polimorphic transition, modification.

$K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ KRİSTALININ RENTGENOQRAFİK VƏ OPTİK MİKROSKOPİYA ÜSULLARI İLƏ TƏDQIQI XÜLASƏ

$K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ monokristalları yetişdirilərək optik mikroskopiya və yüksək temperatur rentgenoqrafıyası üsulları ilə otaq temperaturundan ərimə temperaturuna kimi tədqiq olunmuşdur. Müəyyən olunmuşdur ki, həmin temperatur intervalında tədqiq olunan kristalda iki müxtəlif polimorf modifikasiya mövcuddur. II \rightarrow III çevrilmə sürətinin temperatur asılılığı üçün $\vartheta = (-0,2863\Delta T + 0,5593\Delta T^2 + 0,01003\Delta T^3) \cdot 10^{-2}$ sm/san empirik asılılığı müəyyən olunmuş və II \rightarrow III çevrilmənin aktivləşmə enerjisi ($E_{II\rightarrow III} = 100,8$ kC/mol) hesablanmışdır.

Açar sözlər: kristal, monokristal, polimorfizm, polimorf çevrilmə, modifikasiya.

ИССЛЕДОВАНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ $K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ МЕТОДАМИ РЕНТГЕНОГРАФИИ ОПТИЧЕСКОЙ МИКРОСКОПИИ

РЕЗЮМЕ

Получены монокристаллы $K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ и методом оптической микроскопии и высокотемпературной рентгенографии проведены исследования в интервале от комнатной до температуры плавления. Установлено, что в этом интервале температур в исследуемых кристаллах имеются две различных полиморфных модификаций. Измерением скорости превращения II \rightarrow III установлено что между скоростью превращения II \rightarrow III и температурой (ΔT) имеется эмпирическая зависимость в виде:

$\vartheta = (-0,2863\Delta T + 0,5593\Delta T^2 + 0,01003\Delta T^3) \cdot 10^{-2}$ см/сек. Вычислена энергия активации процесса превращения II \rightarrow III ($E_{II\rightarrow III} = 100,8$ кДж/мол).

Ключевые слова: кристалл, монокристалл, полиморфные превращения, модификация.

Введение

Изучение структурных превращений в нитратовых соединениях щелочных металлов имеет очень большое научное и практическое значения, так как этот процесс тесно связан с вопросами технологии получения монокристаллов смещенного состава, обладающих полиморфизмом. Кроме этого эти соединения применяются в пиротехнике, технологии взрывчатых веществ и при подготовке лекарственных препаратов.

Как известно нитрат калия и цезия от комнатной до температуры плавления имеют по две различные модификации. При охлаждении в KNO_3 между III и II модификациями имеется одна нестабильная ромбоэдрическая модификация.

Структурные данные отдельных модификации и температурные интервалы существования их приведены в таблице 1.

Таблица 1. Полиморфные модификации и температурный интервал их существования KNO_3 и $CsNO_3$

Состав	Сингония	Параметры кристаллической решетки				Пространственная группа	Температурный интервал T, К	Литература
		a, Å	b, Å	c, Å	α			
KNO_3	Орторомбическая	4.41	9.17	6.42		$Fm\bar{3}m$	300-400	1
	Ромбоэдрическая	7.41	-	10.71	$44^\circ 35'$	$R\bar{3}m$	400-610	2
	Ромбоэдрическая	4.35	-	-	$76^\circ 56'$	$R\bar{3}m$	383-397	3
$CsNO_3$	Тригональная	10.87	-	7.76		$P3/m$	434-687	4
	Кубическая	8.98	-	-		$Pa\bar{3}$	Ниже 434	5

На основании полученных данных о морфологии и кинетики полиморфных превращений в нитрате цезия выявлено существование новой α -модификации между I и II-модификациями [6].

Для выяснения закономерностей полиморфных превращений в твердой растворе нитрата цезия в нитрате калия нами проведена серия микроскопических и рентгенографических исследований, целью которых является установление влияния на механизм этих превращений в нитрате калия частичного замещения ионов K^+ ионами Cs^+ . Настоящая работа является частью запланированных нами серий работ [7, 8, 9] и посвящена рентгенографическому и микроскопическому исследованию полиморфных превращений в этих твердых растворах, которые ранее не исследовались.

Методика эксперимента и полученные результаты

Монокристаллы II модификации $K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ получены из водного раствора при комнатной температуре методом изотермической кристаллизации. Для совершенства и чистоты полученных монокристаллов реактивы KNO_3 и $CsNO_3$ марки «ХЧ» подвергались дополнительной очистке путем многократной кристаллизации. Для рентгенографических исследований из выращенных монокристаллов получены образцы в виде порошка, так как рентгенографические исследования проведены на порошковом дифрактометре типа D8 ADVANCE фирмы «Bruker» при режиме 40 кВ, 40 мА, CuK_α -излучения ($\lambda=1.5406$ Å), в температурной камере типа ТТК 723 К в интервале температур $77K < T < 723K$.

Кинетические исследования проведены методом оптической микроскопии, предложенным в [10]. Измерение скорости роста кристалла III модификации при превращении II \rightarrow III проведено на нагревательном столике оптического микроскопа, обеспечивающем полное термостатированные исследуемых кристаллов. Температура кристаллов измерялась термопарой, спайка которой непосредственно касалась поверхности образцов. Точность измерения температуры при 373K составляло $\pm 0,5K$.

Полученные 22 дифракционных отражений при температуре 300K в интервале углов $10^\circ \leq 2\theta \leq 80^\circ$ индексируются орторомбической сингонии с параметрами $a=5.4104$ Å, $b=6.4267$ Å, $c=9.1654$ Å, прост. группа $Pm\bar{3}n$. После записи дифракционных отражений при комнатной температуре, повышая температуру образца проводились записи через каждые 10 К.

Перед началом каждой записи температура образца поддерживалась постоянной в течение 30 минут. По изменениям интенсивности тех структурно чувствительных отражений, которые исчезают при структурных превращениях была определена, что при температуре $T > 450\text{K}$ в исследуемом кристалле происходит структурное превращение, т.е. орторомбическая модификация превращается в гексагональную с параметрами кристаллической решетки $a=5.4295\text{\AA}$, $c=9.7756\text{\AA}$, пр. гр. $R\bar{3}m$.

Дальнейшее нагревание кристаллов $\text{K}_{0.965}\text{Cs}_{0.035}\text{NO}_3$ показывают, что до температуры плавления число и интенсивность принадлежащие гексагональной решетке остаются без изменения, т.е. до температуры плавления очередная структурная превращения не наблюдаются. Расчет дифрактограм кристалла $\text{K}_{0.965}\text{Cs}_{0.035}\text{NO}_3$ записанных при разных температурах приведен в таблице 2 и на рис.1 представлена соответствующая дифракционная картина.

При охлаждении исследуемый кристалл при $T < 452\text{K}$ возвращается в исходное состояние. Это означает, что структурные превращения в данном кристалле имеют энантиотропный характер. Таким образом по результатам экспериментальных данных в кристалле $\text{K}_{0.965}\text{Cs}_{0.035}\text{NO}_3$ в интервале температур $300\div 600\text{K}$ происходят полиморфные превращения по следующей схеме:

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">Орторомбическая</td></tr> <tr><td>$a=5.4104\text{\AA}$</td></tr> <tr><td>$b=6.4267\text{\AA}$</td></tr> <tr><td>$c=9.1654\text{\AA}$</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">пр. гр. $Pm\bar{c}n$</td></tr> </table>	Орторомбическая	$a=5.4104\text{\AA}$	$b=6.4267\text{\AA}$	$c=9.1654\text{\AA}$	пр. гр. $Pm\bar{c}n$	$T > 452\text{ K}$ \rightarrow \leftarrow $T < 452\text{ K}$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">Гексагональная</td></tr> <tr><td>$a=5.4295\text{\AA}$</td></tr> <tr><td>$c=9.7756\text{\AA}$</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">пр. гр. $R\bar{3}m$</td></tr> </table>	Гексагональная	$a=5.4295\text{\AA}$	$c=9.7756\text{\AA}$	пр. гр. $R\bar{3}m$
Орторомбическая											
$a=5.4104\text{\AA}$											
$b=6.4267\text{\AA}$											
$c=9.1654\text{\AA}$											
пр. гр. $Pm\bar{c}n$											
Гексагональная											
$a=5.4295\text{\AA}$											
$c=9.7756\text{\AA}$											
пр. гр. $R\bar{3}m$											

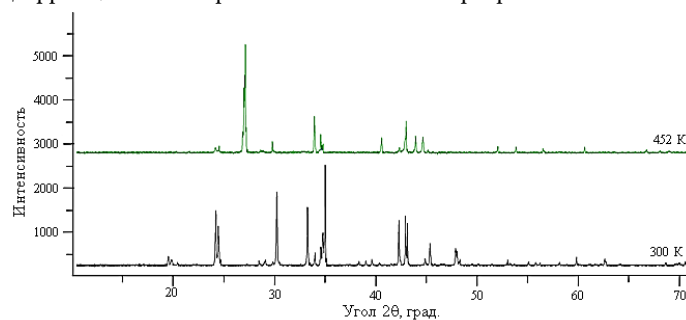
При структурных превращениях переход мета стабильной модификации в более стабильную связан с преодолением энергетического барьера, который существенно меньше, если превращения происходит постепенно, путем зарождения и последовательного роста в ней области новой фазы. А для оценки энергетического барьера необходимо иметь данные о скорости роста кристаллов при полиморфных превращениях. Прежде чем измерить скорость роста кристаллов III-модификации при превращении II→III нами была определена температура равновесия II и III фаз ($T_0=450\pm 0,5\text{K}$).

При измерении скорости роста III-модификации при превращении II→III в зависимости от температуры нами были использованы монокристаллы, удовлетворяющие следующим требованиям:

1. Матричный кристалл должен быть не напряженным и бездефектным;
2. Условия получения и размеры одинаковые;

Превращения II→III должен быть типа монокристалл→монокристалл.

Рис. 1. Дифракционная картина $\text{K}_{0.965}\text{Cs}_{0.035}\text{NO}_3$ при различных температурах.



Экспериментальные данные полученные от шести кристаллов и обработанные по программе «MATLAB» дают функциональную зависимость скорости роста III –модификации от температуры в виде: $\vartheta = (-0,2863\Delta T + 0,5593\Delta T^2 + 0,01003\Delta T^3) \cdot 10^{-2}$ см/сек. Здесь $\Delta T = T_{пр} - T_0$, где $T_{пр}$ -температура превращения, T_0 -температура равновесия.

Таблица 2. Расчет дифрактограммы кристалла $K_{0.965}Cs_{0.035}NO_3$ записанной при разных температурах (CuK_{α} -излучения, $\lambda = 1.5406 \text{ \AA}$, 40кВ, 40мА)

$T_{\text{экс.К}}$	2θ , град	$d_{\text{экс.}, \text{\AA}}$	I/I_0 , %	hkl	Параметры элементарных ячеек
300	19.033	4.65918	8.9	110	Орторомбическая $a = 5.4104 \text{ \AA}$, $b = 6.4267 \text{ \AA}$, $c = 9.1654 \text{ \AA}$, пр. гр. $Pm\bar{c}n$
	23.566	3.77217	45.6	111	
	23.828	3.73123	42.7	021	
	29.047	3.0761	10.4	121	
	29.432	3.03238	99	012	
	32.378	3.0323	58.5	102	
	32.422	2.7592	21.1	031	
	33.088	2.7052	16.1	200	
	33.663	2.6603	46.9	130	
	33.86	2.6452	65.7	112	
	34.049	2.631	100	022	
	41.184	2.19014	56	221	
	41.821	2.158271	55.3	041	
	43.705	2.06948	15.3	202	
	44.161	2.04917	28.2	132	
	46.772	1.94066	20.4	023	
	47.093	1.93168	9.4	231	
	58.254	1.58254	9.5	014	
	60.947	1.5189	14.2	114	
	61.068	1.51619	7.3	024	
67.783	1.3814	6.9	204		
68.655	1.36597	7.3	214		
69.43	1.3526	10.4	400		
452	18.135	4.8878	4.4	002	Гексагональная $a = 5.4295 \text{ \AA}$, $c = 9.7756 \text{ \AA}$, пр. гр. $R\bar{3}m$
	18.858	4.70208	5.7	100	
	20.948	4.23737	3.6	101	
	26.279	3.38862	100	102	
	32.968	2.71474	40.1	110	
	33.43	2.67827	8.9	103	
	39.387	2.28586	19.6	201	
	41.614	2.16849	26.3	104	
	42.64	2.11868	20.8	202	
	43.347	2.08574	25.6	005	
	52.276	1.74855	10.7	211	
	54.928	1.67023	4.4	122	
	58.874	1.56736	10	300	
	64.813	1.43734	6	124	
	66.099	1.41246	5.1	303	
69.151	1.35737	6.8	220		
71.711	1.31509	3.6	215		
75.371	1.26004	4.8	132		

В таблице 3 приведены эмпирические и экспериментальные данные скорости роста III –модификации при превращении II→III в зависимости от температуры, а на рис. 2 по-

казаны графики скорости роста III –фазы в зависимости от температуры построенные по экспериментальным данным, и по данным эмпирической формулы. Как видно из таблицу 3 и из рис. 2.с повышением температуры скорость роста кристалла III –модификации увеличивается.

Таблица 3. Значения скорости роста ($\vartheta_{\text{экс}}$ и $\vartheta_{\text{эмп}}$) III модификации при полиморфном превращении II→III в монокристаллах $\text{K}_{0,965}\text{Cs}_{0,035}\text{NO}_3$.

$\Delta T, \text{K}$	$\vartheta_{\text{экс}} \cdot 10^{-2} \text{см/с}$	$\vartheta_{\text{эмп}} \cdot 10^{-2} \text{см/с}$
1	0,215	0,390
2	3,613	2,123
3	4,860	5,195
4	8,640	9,599
5	15,73	15,331
6	21,922	22,386
7	30,482	30,759
8	40,915	40,446
9	52,218	51,440
10	63,123	63,733

Кроме этого частичное замещения ионов K^+ ионами Cs^+ также увеличивает скорость роста III –модификации при II→III превращении. Если при $\Delta T=10\text{K}$ температуре скорость роста кристалла III –модификации нитрата калия $4,68 \cdot 10^{-2}$ см/сек, то при такой же температуре в кристаллах $\text{K}_{0,965}\text{Cs}_{0,035}\text{NO}_3$ этот же скорость имеет значения $62,78 \cdot 10^{-2}$ см/сек. Значит замещения ионов K^+ ионами Cs^+ примерно 13 раз увеличивает скорость роста III –модификации, и столько же уменьшает высоту энергетического барьера.

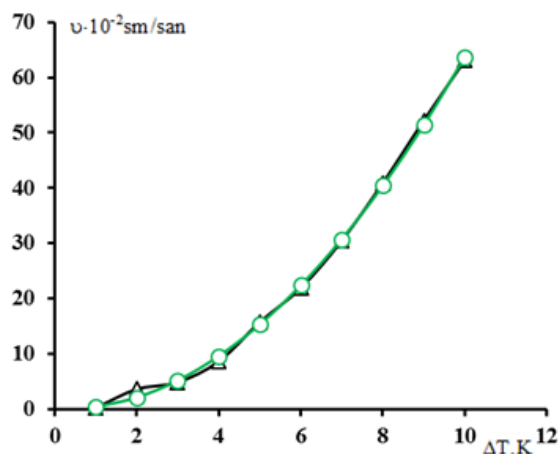
Для оценки энергии активации превращении II→III в $\text{K}_{0,965}\text{Cs}_{0,035}\text{NO}_3$ нами была использована теоретическая формула полученная Г. Фольмером [10] в предположении, что рост двумерных зародышей, возникших награнице кристалла, происходит путем последовательного присоединения отдельных молекул:

$$v = k_1 e^{-\frac{k_2}{T_0}} e^{-\frac{k_3}{T_0 \Delta T}}$$

где k_2 -константа, учитывающая энергетическая порог для перехода молекул из жидкости на поверхность кристалла (в нашем случае энергетической порог для перехода молекулы из одной модификации в низкую) ($k_2 = \frac{E}{R}$, где E-энергия активации рассчитанная на 1 мол. R-универсальная газовая постоянная), k_3 - константа пропорциональная работе образования двумерного зародыша, ΔT -переохлаждению (в нашем случае температура задержка), T_0 -температура равновесия.

Применяя эту формулу при превращению II→III в $\text{K}_{0,965}\text{Cs}_{0,035}\text{NO}_3$ для энергии активации процесса нами получено $E=100,8$ кДж/мол

Рис. 2. Зависимость скорости роста кристаллов модификации III при превращении II→III от температуры; Δ –экспериментальные данные, \circ –данные, полученные из эмпирической формулы.



Заклучение

Таким образом, экспериментально установлено, что в кристалле $K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ при температуре $T > 450K$ происходит II→III полиморфные превращения иона носит энантиотропный характер, т.е. при $T < 452K$ исследуемый кристалл возвращается в исходное состояние. Это подтверждается морфологическими исследованиями проведенными наш под оптическим микроскопом [12, 13]. Также установлено, что промежуточная модификация [3] между III и II модификациями в исследуемых кристаллах отсутствует. Частичное замещение ионов калия ионами цезия способствует увеличению температуры структурных превращений, примерно на 50K в исследуемом кристалле твердого раствора.

Кинетическая исследования показывают, что формулу выведенная Г.Фольмером для роста кристаллов из жидкого состояния, можно успешно применять к исследованию роста кристаллов из твердого состояния при полиморфном превращении. На основе кинетических измерений можно полагать, что II↔III превращения в $K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ происходит по механизму образования и роста двумерных зародышей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Edvard D.A. A determination of the complete crystal structure of potassium nitrate, Z.Kristallogr., 1943, v.80, p.154.
2. Tahvonen P.E. X-Ray Investigation of Molecular Rotation in Potassium Nitrate Crystal, Ann. Acad. Sci. Fennical., Ser.A, 1947, N.44, p.20.
3. Bridgman P.W. The velocity of polymorphic change between solid. Proc. Am. Acad. Arts. Sci, 1916, v.52, p.57-88.
4. Finback C., Hassel O., The rotation of anion polyhedra in cubic structures III nitrates. Zs.Phys.Chem.,1937, v.B35, p.25.
5. Korhonen U. The Crystal Structure of $CsNO_3$, Ann. Acad. Sci. Fennical., Ser.A, 1953, v.1, N.15, pp.1-16.
6. Алекперов Ч.М., Насиров В.И., Магеррамова Ф.Г., Асадов Ю.Г. Морфология и кинетика роста кристаллов при полиморфных превращениях в монокристаллах $RbNO_3$ и $CsNO_3$. Препринт, ИФАН Азерб., 1996, №4, с.38.
7. Nəsirov V.İ., Bayramov R.B., Nəsirov E.V. $K_{0,965}Cs_{0,035}NO_3$ monokristallarında II↔III çevrilmələrin morfolojiyası. AANDM-nin Elmi əsərlər, XXIV buraxılış, Bakı, 2015, s.99-102.
8. Nəsirov V.İ., Bayramov R.B., Nəsirov E.V. $K_{0,985}Rb_{0,015}NO_3$ monokristallarında polimorf çevrilmənin kinetikası. "Meta. Fiz. Müasir Prob. V Bey. Konf., Bakı, 2016, s.265-266.

9. Nəsirov V.İ., Bayramov R.B., Nəsirov E.V. $K_{0,985}Cs_{0,015}NO_3$ monokristalında II \leftrightarrow III çevrilmələr zamanı kristal böyüməsinin morfolojiyası. H.Əliyevin 93-cü il dönümünə həsr olunmuş Gənc Təd. III Bey. Konf., 2016, s.76-77.
10. Асадов Ю.Г., Насиров В.И. Исследование кинетики полиморфного превращения в монокристаллах нитрата калия // Кристаллография, 1972, вып.17, №5, с.991-995.
11. Volmer M. Kinetik der phasenbildung steincopt // Drezden and Leipzig 1939, v.3, p.38-56.
12. Nəsirov V.İ., Bayramov R.B., Nəsirov E.V. $K_{0,955}Cs_{0,045}NO_3$ kristallarında II \leftrightarrow III polimorf çevrilmələri. "Fizikanın müasir problemləri" VII Res. Kon. mat. BDU, Bakı, 2014, s.213-215.
13. Nasirov V.I., Bairamov R.B. The kinetics of polymorphic transformation in $K_{1-x}Cs_xNO_3$ ($x=0,015; 0,035; 0,045$) single crystals. AMEA Xəbərlər, 2016, v.72, N.1, p.29-33.

UOT 541.8: 532.1PASC: 05.40.-a

THE INVESTIGATION OF WATER SOLUTIONS OF POLYETHYLENE GLYCOL-6000 BY METHODS OF THE VISCOUSIMETRY AND THE SPECTROPHOTOMETRY

E.A MASIMOV, S.Y. OJAGVERDIEVA, Y.KH. SHAKHVERDIYEV, T.O. BAGIROV

Baku State University

Baku / AZERBAIJAN

rsfmo@rambler.ru

ABSTRACT

Dynamic viscosity of aqueous solutions of polyethylene glycol-6000 in rather wide interval of concentration and temperatures has been measured. Ratios of dependence of solutions' viscosity at various constant temperatures on PEG concentration in solution have been gained. On a viscosity-temperature dependence the activation energy of viscous flow of solutions in various concentrations have been calculated. It was found that by increasing PEG concentration in solution the activation energy of viscous flow increases, and the concentration dependence of activation energy of viscous flow is more weakly expressed in the field of rather high concentrations of PEG. Absorption spectra of aqueous solutions of PEG-6000 in the range of wavelengths of 200-1000 nm have been studied. Two absorption bands in ultraviolet area have been observed. The equations well describing the dependences of the optical density of solutions on the PEG concentration at both lengths of waves have been gained.

Key words: solutions, polyethylene glycol, viscosity, absorption spectra.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИЭТИЛЕНГЛИКОЛЯ-6000 МЕТОДАМИ ВИСКОЗИМЕТРИИ И СПЕКТРОФОТОМЕТРИИ

РЕЗЮМЕ

В сравнительно широком интервале концентраций и температур измерена динамическая вязкость водных растворов полиэтиленгликоля-6000. Получены соотношения зависимости вязкости растворов при различных постоянных температурах от концентрации ПЭГ в растворе. По зависимости вязкости от температуры вычислена энергия активации вязкого течения растворов различной концентрации. Установлено, что с увеличением концентрации ПЭГ в растворе энергия активации вязкого течения возрастает, причем концентрационная зависимость энергии активации вязкого течения слабее выражена в области сравнительно высоких концентраций ПЭГ. Изучены спектры поглощения водных растворов ПЭГ-6000 в интервале длин волн 200-1000 нм. Наблюдается две полосы поглощения в ультрафиолетовой области. Получены уравнения хорошо описывающие зависимости оптической плотности растворов от концентрации ПЭГ при обеих длинах волн.

Ключевые слова: растворы, полиэтиленгликоль, вязкость, спектры поглощения.

VİSKOZİMETRİYA VƏ SPEKTROFOTOMETRİYA METODLARI İLƏ POLİETİLENQLİKOLUN-6000 SULU MƏHLULLARININ TƏDQIQI

XÜLASƏ

Kifayət qədər geniş qatılıq və temperatur intervalında polietilenqlikolun-6000 suda məhlullarının dinamik özlülüyü ölçülmüşdür. Sabit müxtəlif temperaturalarda məhlulların özlülüklərinin polimerin qatılığından asılılığını əks etdirən ifadələr alınmışdır. Özlülüyün temperaturdan asılılığından istifadə edərək müxtəlif qatılıqlı məhlullar üçün özlü axının aktivləşmə enerjiləri hesablanmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, polietilenqlikolun qatılığı artıqda özlü axının aktivləşmə enerjisi artır və bu artım yüksək qatılıq oblastunda zəifləyir. Tədqiq olunan məhlulların 200-1000 nm dalğa uzunluqları intervalında udulma spektrləri tədqiq edilmişdir. Spektrdə ultrabənövşəyi oblastda iki udma zolağı müşahidə olunmuşdur. Məhlulların optik sıxlığının polimerin qatılığından asılılığını yaxşı ifadə edən tənliklər alınmışdır.

Acar sözlər: məhlullar, polietilenqlikol, özlülük, udma spektrləri.

Введение

Как известно, двухфазные системы полимер-соль-вода широко применяются для разделения и очистки различных веществ, в том числе и веществ биологической природы. Несмотря на то, что исследованию фазовых диаграмм водных систем полимер-соль и их применению в биотехнологии и медицине посвящается достаточное число работ [1-5], физико-химическому исследованию водных растворов фазообразующих компонентов уделяется недостаточное внимание. Между тем, для более глубокого понимания механизма разделения системы полимер-соль-вода на две водные фазы, влияния различных добавок на разделительную способность этих двухфазных систем, необходимо изучение водных растворов фазообразующих компонентов в отдельности различными методами физико-химического анализа. Среди высокомолекулярных компонентов водных двухфазных систем полиэтиленгликоли различной молекулярной массы являются наиболее часто используемыми полимерами [6-10].

Материалы и методы исследования

Работа посвящена исследованию водных растворов полиэтиленгликоля-6000 методами вискозиметрии и спектрофотометрии. В сравнительно широком интервале концентраций (0,5-10 вес %) и температур (288,15К – 323,15К) измерена вязкость водных растворов ПЭГ-6000. Вязкость растворов измеряли на вискозиметре SVM 3000/G2 *Stabinger Viscometr, Anton Paar* (Австрия). Электронные спектры поглощения водных растворов ПЭГ были сняты на спектрофотометре SPEKORD 200 *plus* в диапазоне длин волн – 190-600 нм по двухлучевой оптической схеме в кварцевых кюветках с длиной оптического пути 10 мм при $25 \pm 0,1^\circ\text{C}$. В работе использовали полиэтиленгликоль-6000 фирмы *Panreac* (Испания) и бидистиллированную воду. Растворы готовили гравиметрическим методом. Измерения проводили на аналитических весах с точностью $\pm 0,0001$ г.

Результаты исследования и их обсуждение

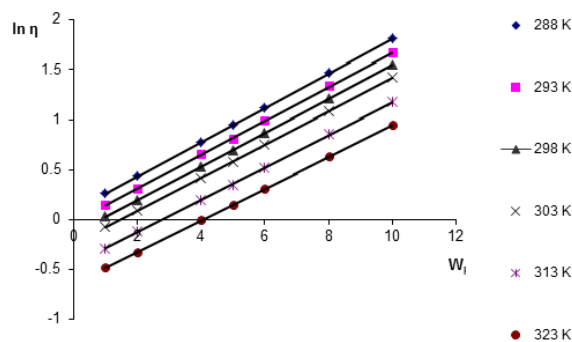
Результаты исследования представлены в виде соответствующих графиков и таблиц.

Зависимость вязкости водных растворов от концентрации полиэтиленгликоля при постоянной температуре хорошо описывается уравнением:

$$\eta = Ae^{BW_p} \quad (1)$$

где A и B константы уравнения, а W_p -весовой процент полиэтиленгликоля в растворе, η -динамическая вязкость раствора в мПа · с.

Рис.1. Зависимость $\ln \eta = f(W_p)$ для водных растворов полиэтиленгликоля-6000 при различных температурах.



Ниже приведены константы уравнения (1), полученные из зависимости логарифма вязкости $\ln \eta = f(W_p)$ при различных температурах.

T, K	288,15	293,15	298,15	303,15	313,15	323,15
A	1,0898	0,9734	0,8676	0,7819	0,6364	0,5268
B	0,173	0,170	0,169	0,166	0,162	0,159

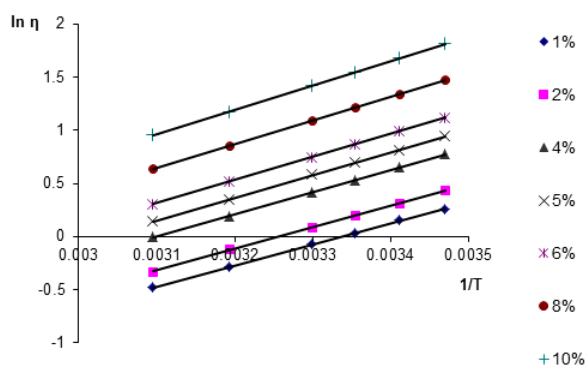
Как видно из этой таблицы значение константы *B* слабо зависит от температуры, в то время как константа *A* заметно изменяется с температурой.

Изменение вязкости растворов данной концентрации с изменением температуры хорошо описывается уравнением Аррениуса-Эйринга-Френкеля.

$$\eta = Ae^{\frac{E}{RT}} \tag{2}$$

где *A* - константа уравнения (2), *E* – энергия активации вязкого течения раствора. Следует отметить, что зависимость $\ln \eta = f(W_p)$, а также $\ln \eta = f(1/T)$ хорошо описываются линейными уравнениями, величины достоверности аппроксимации (*R*²) которых близка к единице.

Рис.2. Зависимость $\ln \eta = f(1/T)$ для водных растворов полиэтиленгликоля-6000



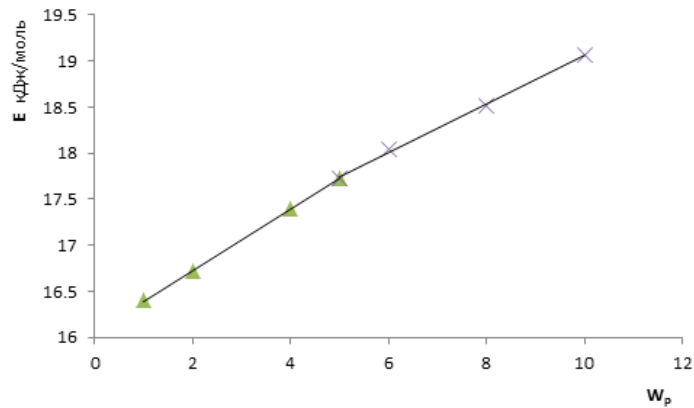
Из зависимости логарифма вязкости от обратной температуры (кривые $\ln \eta = f(1/T)$, рис. 2) в указанном интервале температур определены энергии активации вязкого течения (*E*) для растворов различной концентрации. Энергия активации вязкого течения растворов различной концентрации приведены ниже

W_p	0	1	2	4	5	6	8	10
E кДж/моль	15,12	16,40	16,72	17,39	17,73	18,04	18,52	19,06

Как видно, энергия активации вязкого течения водного раствора увеличивается с увеличением концентрации полиэтиленгликоля, что находится в согласии с результатами работы [11] для сравнительно разбавленных водных растворов ПЭГ различной молекулярной массы. На рис. 3 представлена зависимость энергии активации вязкого течения от концентрации ПЭГ в растворе.

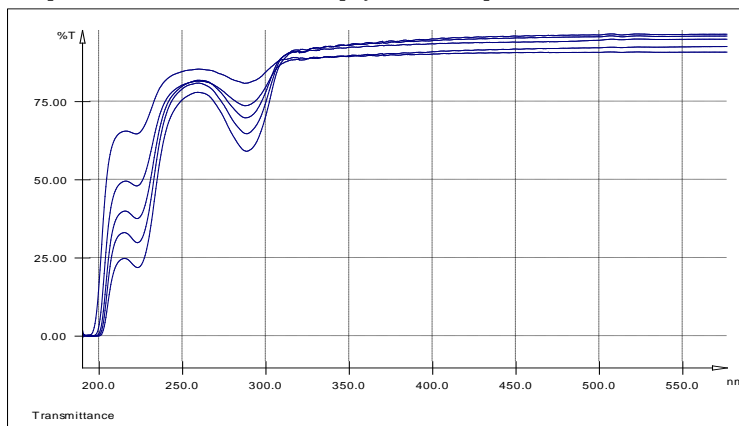
Концентрационная зависимость энергии активации вязкого течения растворов выражена слабее в области сравнительно высоких концентраций ПЭГ (≥ 5 вес.%), что находится в хорошем согласии с выводами волюмометрии об образовании в этих растворах относительно стабильной пространственной структуры, в которой молекулы ПЭГ соединены между собой за счет водородных связей, образуемых между молекулами воды и кислородом оксиэтильных групп молекулы полиэтиленгликоля [12].

Рис.3. Зависимость энергии активации вязкого течения водных растворов от концентрации ПЭГ-6000.

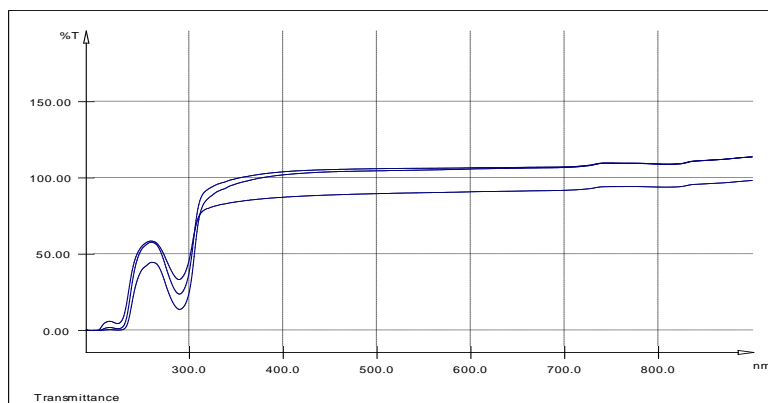


Следует отметить, что кривая зависимости приведенной вязкости растворов от концентрации полиэтиленгликоля (кривые $\eta_{уд/c} = f(c)$) меняет наклон в области сравнительно высоких концентраций, что также находится в хорошем соответствии с концентрационной зависимостью энергии активации вязкого течения (кривая $E = f(W)$). Тот факт, что линейная зависимость приведенной вязкости от концентрации полимера наблюдается для растворов сравнительно высоких концентраций (до 5 вес %), по всей вероятности связана с одной стороны сравнительно небольшим значением молярной массы полиэтиленгликоля и исключительной гибкостью кислородных связей, соединяющих отдельные звенья полимера, с другой и как следствие, большой гибкостью молекулы полиэтиленгликоля в целом.

Рис.4. Спектры пропускания водных растворов ПЭГ-6000 при различных концентрациях полимера (рис. А- 1, 2, 3, 4, 5 весовых %), (рис. В- 10, 15, 20 вес. %). Сверху вниз содержание ПЭГ соответственно увеличивается.



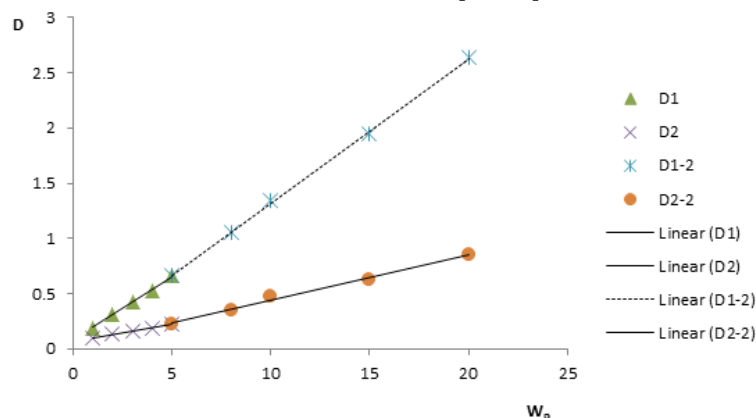
А



В

В широком интервале концентраций (1-20 вес %) были изучены электронные спектры поглощения водных растворов ПЭГ-6000 в интервале длин волн 120-1000 нм, которые представлены на рис. 4.

Рис.5. Зависимость оптической плотности водных растворов ПЭГ-6000 от концентрации.



Наблюдается две полосы поглощения при 223 и 288 нм. Следует отметить, что зависимости оптической плотности водных растворов от концентрации ПЭГ при обеих длинах волн меняют наклон в области сравнительно высоких концентраций ($W \geq 5$), что подтверждает выводы вискозиметрии. Найдены константы уравнений этих зависимостей.

$$\lambda_{\max} = 223 \text{ нм } 0 \leq W_p \leq 5 \quad D = 0,0807 + 0,1143 W_p \quad (3)$$

$$5 \leq W_p \leq 20 \quad D = 0,0108 + 0,131 W_p \quad (4)$$

$$\lambda_{\max} = 288 \text{ нм } 0 \leq W_p \leq 5 \quad D = 0,0612 + 0,0328 W_p \quad (5)$$

$$5 \leq W_p \leq 20 \quad D = 0,0285 + 0,0412 W_p \quad (6)$$

Как было указано в работе [11] увеличение энергии активации вязкого течения с повышением концентрации полимера свидетельствует о более высокой степени структурирования растворов полимеров по сравнению с растворителем (водой). В работе [13] указано, что в качестве признака образования в водных растворах неэлектролитов более структурированных образований (квазикристаллических структур) можно выделить в частности появление минимума на кривой зависимости парциального мольного объема неэлектролита от концентрации последнего, что хорошо согласуется с выводами работы [12]. Анализ полученных результатов и вышеизложенных положений позволяет заключить, что наличие изменение наклона на кривых зависимостей энергия активации вязкого течения (кривая $E = f(W_p)$), приведенной вязкости (кривая $\eta_{sp/c} = f(W_p)$), а также оптической плотности (кривая $D = f(W_p)$) от концентрации полиэтиленгликоля, также может служить признаком образования в растворах квазикристаллических структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tubío G., Nerli B., Picó G. Partitioning features of bovine trypsin and alpha-chymotrypsin in polyethyleneglycol-sodium citrate aqueous two-phase systems // **Journal of chromatography**, 2007, **В 852(1-2)**, p.244-249.
2. Tubio G., Picó G., Nerli B. Extraction of trypsin from bovine pancreas by applying polyethyleneglycol/sodium citrate aqueous two-phase systems // **J. Chromatogr B**. 2009; 877(3): p. 115-130.

3. Nascimento K., Azevedo A., Cavada B., Aires-Barros M. Partitioning of Canavalia brasiliensis Lectin in Polyethylene Glycol - Sodium Citrate Aqueous Two-Phase Systems // *Sep. Sci. Technol.*, 45, 2010, p. 2180-2186.
4. Raja S., Murty V., Thivaharan V., Rajasekaran V. et al. Aqueous Two Phase Systems for the Recovery of Biomolecules // *Scientific and Academic Publishing*, 2011, V. 1 (1), p. 7-16
5. Perez B., Malpiedi L., Tubío G., Nerli B. et al. Experimental determination and thermodynamic modeling of phase equilibrium and protein partitioning in aqueous two-phase systems containing biodegradable salts // *Journal of Chemical Thermodynamics*, 2013, v. 56, p. 136–143.
6. Murugesan T., Perumalsamy M. Liquid-Liquid Equilibria of Poly (ethylene glycol) 2000 + Sodium Citrate + Water at (25, 30, 35, 40, and 45) °C // *J. Chem. Eng. Data*, v. 50, 2005, p. 1392 – 1395.
7. Oliveira R., Reis Coimbra J., Minim L. et al. Liquid-Liquid Equilibria of Biphasic Systems Composed of Sodium Citrate + Polyethylene(glycol) 1500 or 4000 at Different Temperatures // *J. Chem. Eng. Data*, 2008, 53 (4), p 895–899.
8. Zafarani-Moattar M., Hamzehzadeh Sh., Hosseyzadeh Sh. Phase diagrams for liquid-liquid equilibrium of ternary poly(etyleneglycol)+di sodium tartrate aqueous system and vapor-liquid equilibrium of constituting binary aqueous systems at T=(298,15, 308,15 and 318,15)K. // *Fluid Phase equilibria*, 2008, 268, p.142-152.
9. Rahimpour F., Baharvand A. Phase Equilibrium in Two-phase System Containing Poly (propylene glycol) and Sodium Citrate at Different pH // *Engineeng and Technology*, 2009, V.59, p.150-153.
10. Масимов Э.А., Оджагвердиева С.Я., Шахвердиев Я.Х., Багиров Т.О. Влияние молекулярной массы полиэтиленгликоля, температуры и некоторых добавок на фазовую диаграмму двухфазной системы ПЭГ-цитрат натрия-вода. // *Успехи естествознания*, 2015, 11, с.65-69.
11. Шуляк И.В. Реологические свойства водных растворов полиэтиленгликолей различной молекулярной массы//И.В.Шуляк, Е.И.Грушова, А.М.Семенченко//*Журнал физической химии*. 2011, Т.85, N3, с.485-488.
12. Масимов Э.А., Багиров Т.О., Оджагвердиева С.Я. Объемные свойства водных растворов полиэтиленгликолей различной молекулярной массы // *Фундаментальные исследования*, №11, 2014, с. 2411-2415.
13. Даккар Г.М., Кораблева Е.Ю. Энтропия активации вязкого течения и структурные особенности водных растворов неэлектролитов в области малых концентраций//*Журнал физ. химии*, 1998, т.72, 4, с.662-666.

UOT:531:530.145PACS: 03.65.Ge

ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE SCHRÖDINGER EQUATION FOR THE HULTHÉN PLUS RING-SHAPED LIKE POTENTIAL

H.I. AHMADOV¹, M.V. QOCAYEVA², T.H. ALIYEVA³, E.A. DADASHOV⁴

¹Department of Equation of Mathematical Physic,
Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics
Baku State University

²Institute of Physics, Azerbaijan National Academy of Sciences
Baku / AZERBAIJAN

³Institute for Physical Problems, Baku State University,

⁴Lankaran State University,
Lankaran / AZERBAIJAN

hikmatahmadov@yahoo.com, mefkureqocayeva@yahoo.com
aliyevatarana@rambler.ru, elnurdadashov82@mail.ru

ABSTRACT

The bound state solution of the modified radial Schrödinger equation is obtained for the Hulthen plus a ring-shaped like potential by using the improved approximation scheme to the centrifugal potential for arbitrary l states. The energy levels are worked out and the corresponding normalized eigenfunctions are obtained in terms of orthogonal polynomials for arbitrary l states. The energy levels and the corresponding normalized eigenfunctions are represented in terms of the Jacobi polynomials for arbitrary l states. A closed form of the normalization constant of the wave functions is also found. It is shown that, the energy eigenvalues and eigenfunctions are sensitive to n_r radial and l orbital quantum numbers.

Keywords: Nikiforov-Uvarov method, Hulthen potential, Ring-Shaped potential.

HÜLTEN ÜSTƏGƏL RİNG-ŞAPED TIPLİ POTENSİAL ÜÇÜN ŞREDİNGER TƏNLİYİNİN ANALİTİK HƏLLİ XÜLASƏ

İşdə mərkəzəqaçma potensialına yeni yaxınlaşma tətbiq etməklə Hülten üstəgəl ring-şaped tipli potensial üçün modifiyə olunmuş radial Şredinger tənliyinin ixtiyari l - halı üçün analitik həlli tapılmışdır. Enerjinin məxsusi qiymətləri və radial dalğa funksiyaları ixtiyari l - halı üçün Yakobi çoxhədlisi ilə ifadə edilmişdir. Dalğa funksiyasının normallanma sabiti üçün kompakt analitik ifadə alınmışdır. Göstərilmişdirki, enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları n_r radial və l orbital kvant ədədlərinin seçilməsinə həssasdırlar.

Açar sözlər: Nikiforov-Uvarov metodu, Hülten potensialı, Ring-Shaped potensialı.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛА ХЮЛТОНА ПЛЮС РИНГ-ШАПЕД ТИПОВ

РЕЗЮМЕ

Получено решение связанного состояния модифицированного радиального уравнения Шредингера для потенциалов Хюлтона плюс Ринг-Шепед типов, используя улучшенную схему аппроксимации для центробежного потенциала для произвольного l состояния. Уровни энергии и соответствующие нормированные собственные функции представлены в виде полиномов Якоби для произвольных l состояний. В компактной форме множитель постоянной нормировки волновых функций также найден. Показано, что собственные значения энергии и собственные функции чувствительны к n_r радиальным и l орбитальным квантовым числам.

Ключевые слова: Метод Никифорова-Уварова, потенциал Хюлтона; потенциал ринг-шапед.

I. Introduction

The exact analytical solutions of the wave equations such as Schrödinger, Dirac and Klein-Fock-Gordon with a physical potential is of paramount importance in quantum physics since

the wave function and its associated eigenvalues contain all necessary information for full description of a quantum system. It is well-known that the exact analytical solutions of the this equations are very important, since a bound states of the wave function is more convenient than the wave function obtained by numerical calculation in explaining the behavior of the system under consideration. Note that, along the years, there was a huge amount of research effort to solve exactly the radial Schrödinger equation for all values of n_r and l quantum numbers. Unfortunately, it could only be possible for a very limited number of potentials such as harmonic oscillators, Coulomb, Kratzer potentials and so on [6] with a centrifugal term for $l \neq 0$.

As known, one of the main objectives in theoretical physics since the early years of quantum mechanics (QM) is to obtain an exact solution of the Schrödinger equation for some special physically important potentials. Since the wave function contains all necessary information for full description of a quantum system, an analytical solution of the Schrödinger equation is of high importance in non-relativistic and relativistic quantum mechanics [1, 2]. There are few potentials for which the Schrödinger equation can be solved explicitly for all n and l quantum states.

The Hulthén potential is one of the important short-range potentials in physics. The potential has been used in nuclear and particle physics, atomic physics, solid-state physics, and its bound state and scattering properties have been investigated by a variety of techniques. General wave functions of this potential have been used in solid-state and atomic physics problems. It should be noted that, Hulthén potential is a special case of Eckart potential [3].

The Hulthén potential is defined by [4, 5]

$$V(r) = -\frac{Ze^2 \delta e^{-\delta r}}{(1 - e^{-\delta r})} \quad (1.1)$$

where Z is a constant and δ is the screening parameter, dimensionless parameters. It should be noted that, the radial Schrödinger equation for the Hulthén potential can be solved analytically for only the states with zero angular momentum [4-8]. For any l states a number of methods have been employed to evaluate bound-state energies numerically [9 - 19].

At small values of the radial coordinate r , the Hulthén potential behaves like a Coulomb potential, whereas for large values of r it decreases exponentially so that its influence for bound state is smaller than, that of Coulomb potential. In contrast to the Hulthén potential, the Coulomb potential is analytically solvable for any l angular momentum. Take into account of this point will be very interesting and important solving Schrodinger equation for the Hulthén plus ring-shaped like potential for any l states within ordinary quantum mechanics.

In this study, we obtain the energy eigenvalues and corresponding eigenfunctions for arbitrary l states by solving the Schrödinger equation for the Hulthén plus ring-shaped like potential using Nikiforov-Uvarov (NU) method [20].

It is known that, using for this potential the Schrödinger equation can be solved exactly for s -wave ($l = 0$) [6].

Unfortunately, for an arbitrary l -states ($l \neq 0$), the Schrödinger equation does not get an exact solution. But many papers show the power and simplicity of NU method in solving central and noncentral potentials [21-26] for arbitrary l -states. This method is based on solving the second-order linear differential equation by reducing to a generalized equation of hypergeo-

metric-type which is a second-order type homogeneous differential equation with polynomial coefficients of degree not exceeding the corresponding order of differentiation.

It would be interesting and an significant to solve the Schrödinger equation for the Hulthén plus ring-shaped potential for $l = 0$, since it has been extensively used to describe the bound and continuum states of the interacting systems.

The combined potential considering in this study is obtained by adding Hulthén potential term to Ring-Shaped potential as:

$$V(r, \theta) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[-\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{Ze^2 \delta e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} + \frac{\beta'}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\beta \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right]. \quad (1.2)$$

The structure of this work is as follows. The Schrödinger equation within Hulthén plus a ring-shaped like potential is provided in Section II. Bound-state Solution of the radial Schrödinger equation for Hulthén potential by Nikiforov-Uvarov method is provided in Section III. The solution of angle-dependent part of the Schrödinger equation is presented in Section IV and, the numerical results for energy levels and the corresponding normalized eigenfunctions are presented in Section V. Finally, some concluding remarks are stated in Section VI.

II. The Radial Schrödinger Equation for Hulthén Plus Ring- Shaped Like Potential

The Schrödinger equation in spherical coordinates is given as

$$\nabla^2 \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] \psi = 0. \quad (2.1)$$

Considering this equation, the total wave function is written as

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.2)$$

Thus for radial and azimuthal Schrödinger equation with Hulthén plus ring-shaped like potential are

$$R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - Ze^2 \delta \frac{e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} \right] R(r) = 0, \quad (2.3)$$

$$\Theta''(\theta) + \cos \theta \Theta'(\theta) + \left[-\left(\frac{\beta' + \beta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) + \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0, \quad (2.4)$$

respectively.

III. Bound State Solution of the Radial Schrödinger Equation for Plus Hulthén Plus Ring-Shaped Potential

As we know, Eq.(2.3) is the radial Schrödinger equation for Hulthén potential. The effective Hulthén potential is:

$$V_{eff}(r) = V_H + V_l = -Ze^2 \delta \frac{e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \quad (3.1)$$

In order to solve Eq.(2.3) for $l \neq 0$, we must make an approximation for the centrifugal term. When $\delta \ll 1$, we use an improved approximation scheme [27-29] to deal with the centrifugal term,

$$\frac{1}{r^2} \approx \delta^2 \left[C_0 + \frac{e^{-\delta r}}{(1 - e^{-\delta r})^2} \right]. \quad (3.2)$$

Now, the effective potential becomes

$$\tilde{V}_{eff}(r) = -Ze^2\delta \frac{e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} \left(C_0 + \frac{e^{-\delta r}}{(1 - e^{-\delta r})^2} \right) \quad (3.3)$$

where the parameter $C_0 = \frac{1}{12}$ (Ref. [30]) is a dimensionless constant. However, when $C_0 = 0$, the approximation scheme becomes the convectional approximation scheme suggested by Greene and Aldrich [31]. It should be noted that this approximation, is only valid for small δr and it breaks down in the high screening region. After using this approximation radial Schrödinger equation is solvable analytically.

We assume $R(r) = \frac{1}{r} \chi(r)$ in Eq.(2.3) and the radial Schrödinger equation becomes

$$\chi''(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E + Ze^2\delta \frac{e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu} \left(C_0 + \frac{e^{-\delta r}}{(1 - e^{-\delta r})^2} \right) \right] \chi(r) = 0. \quad (3.4)$$

In order to transform Eq.(3.4), the equation of the generalized hypergeometric-type which is in the form [20]

$$\chi''(s) + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma} \chi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2} \chi(s) = 0, \quad (3.5)$$

we use the following ansatz in order to make the differential equation more compact,

$$-\varepsilon^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2 \delta^2} E, \alpha^2 = \frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2 \delta}, s = e^{-\delta r}. \quad (3.6)$$

Hence, we obtain

$$\chi''(s) + \frac{\chi'(s)}{s} + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \left[-\varepsilon^2(1-s)^2 - l(l+1)(C_0(1-s)^2 + s) + \alpha^2 s(1-s) \right] \chi(s) = 0 \quad (3.7)$$

Now, we can successfully apply NU method for defining eigenvalues of energy. By comparing Eq.(3.7) with Eq.(3.5), we can define the following:

$$\tilde{\tau}(s) = 1 - s, \sigma(s) = s(1 - s), \tilde{\sigma}(s) = -\varepsilon^2(1 - s)^2 - l(l + 1)(C_0(1 - s)^2 + s) + \alpha^2 s(1 - s). \quad (3.8)$$

We change $\lambda = l(l + 1)$ then we obtain:

$$\tilde{\sigma}(s) = -\varepsilon^2(1 - s)^2 - \lambda(C_0(1 - s)^2 + s) + \alpha^2 s(1 - s). \quad (3.9)$$

If we take the following factorization,

$$\chi(s) = \phi(s)y(s) \quad (3.10)$$

for the appropriate function $\phi(s)$, Eq.(3.10) takes the form of the well-known hypergeometric-type equation. The appropriate $\phi(s)$ function must satisfy the following condition:

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \quad (3.11)$$

where function $\pi(s)$ is defined as

$$\pi(s) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}. \quad (3.12)$$

Finally, the equation, where $y(s)$ is one of its solutions, takes the form known as hypergeometric-type,

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \bar{\lambda}y(s) = 0, \quad (3.13)$$

where

$$\bar{\lambda} = k + \pi' \quad (3.14)$$

and

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad (3.15)$$

For our problem, the $\pi(s)$ function is written as

$$\pi(s) = \frac{-s}{2} \pm \sqrt{s^2[a-k] - s[b-k] + c}, \quad (3.16)$$

where the values of the parameters are

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} + \varepsilon^2 + \lambda C_0 + \alpha^2, \\ b &= 2\varepsilon^2 + 2\lambda C_0 + \alpha^2 - \lambda, \\ c &= \varepsilon^2 + 2C_0. \end{aligned}$$

The constant parameter k can be found under the condition that the discriminant of the expression under the square root is equal to zero. Hence, we obtain

$$k_{1,2} = (b - 2c) \pm 2\sqrt{c^2 + c(a - b)}. \quad (3.17)$$

Now, we can find four possible functions for $\pi(s)$:

$$\pi(s) = -\frac{s}{2} \pm \begin{cases} (\sqrt{c} - \sqrt{c+a-b})s - \sqrt{c} & \text{for } k = (b-2c) + 2\sqrt{c^2 + c(a-b)}, \\ (\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b})s - \sqrt{c} & \text{for } k = (b-2c) - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)}. \end{cases} \quad (3.18)$$

According to NU method, from the four possible forms of the polynomial $\pi(s)$, we select the one for which the function $\tau(s)$ has the negative derivative. Therefore, the appropriate function $\pi(s)$ and $\tau(s)$ are

$$\pi'(s) = -\frac{1}{2} - [\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b}] \quad (3.19)$$

$$\pi(s) = \sqrt{c} - s \left[\frac{1}{2} + \sqrt{c} + \sqrt{c+a-b} \right] \quad (3.20)$$

$$\tau(s) = 1 + 2\sqrt{c} - 2s \left[1 + \sqrt{c} + \sqrt{c+a-b} \right] \quad (3.21)$$

for

$$k = (b - 2c) - 2\sqrt{c^2 + c(a - b)}. \quad (3.22)$$

Also by Eq.(3.14), we can define the constant $\bar{\lambda}$ as

$$\bar{\lambda} = b - 2c - 2\sqrt{c^2 + c(a - b)} - \left[\frac{1}{2} + \sqrt{c} + \sqrt{c+a-b} \right]. \quad (3.23)$$

Given a nonnegative integer n , the hypergeometric-type equation has a unique polynomial solution of degree n if and only if

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

and $\bar{\lambda}_m \neq \bar{\lambda}_n$ for $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ [32], then it follows that

$$\bar{\lambda}_{n_r} = b - 2c - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} - \left[\frac{1}{2} + \sqrt{c + \sqrt{c+a-b}} \right] = 2 \left[1 + \left(\sqrt{c + \sqrt{c+a-b}} \right) \right] + n_r(n_r - 1). \quad (3.25)$$

We can solve Eq.(3.25) explicitly for c and by using the relation $c = \varepsilon^2 + \lambda C_0$, which brings

$$\varepsilon^2 = \left[\frac{\lambda + \frac{1}{2} + (1 + \frac{1}{2})(2n+1) + 2n + n^2 - n - \alpha^2}{2(1 + \frac{1}{2}) + 2n+1} \right]^2 - \lambda C_0, \quad (3.26)$$

Finally, we can found for ε^2 :

$$\varepsilon^2 = \left[\frac{1+n+1}{2} - \frac{\alpha^2}{2(1+n+1)} \right]^2 - l(l+1)C_0. \quad (3.27)$$

We substitute ε^2 into Eq.(3.6) with $\lambda = l(l+1)$, which identifies

$$E_{nl} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1+n+1}{2} \delta - \frac{\mu Z}{\hbar^2} e^2 \right]^2 + \frac{\hbar^2 \delta^2}{2\mu} l(l+1)C_0. \quad (3.28)$$

If we take $C_0 = 0$ in the Eq.(3.28), then we obtain result [33].

Now, using NU method we can obtain the radial eigenfunctions. After substituting $\pi(s)$ and $\sigma(s)$ into Eq.(3.11) and solving first-order differential equation, it is easy to obtain

$$\phi(s) = s^{\sqrt{c}} (1-s)^K, \quad (3.29)$$

where $K = \frac{1}{2} + \sqrt{c + a - b} = l + 1$

Furthermore, the other part of the wave function $y(s)$ is the hypergeometric-type function whose polynomial solutions are given by Rodrigues relation

$$y_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds} \left[\sigma^n(s) \rho(s) \right] \quad (3.30)$$

where C_n is a normalizing constant and $\rho(s)$ is the weight function which is the solution of the Pearson differential equation. The Pearson differential equation and $\rho(s)$ for our problem is given as

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho, \quad (3.31)$$

$$\rho(s) = (1-s)^{2K-1} s^{2\sqrt{c}}, \quad (3.32)$$

respectively.

Substituting Eq.(3.32) in Eq.(3.30) we get

$$y_{n_r}(s) = C_{n_r} (1-s)^{1-2K} s^{2\sqrt{c}} \frac{d^{n_r}}{ds^{n_r}} \left[s^{2\sqrt{c}+n_r} (1-s)^{2K-1+n_r} \right]. \quad (3.33)$$

Then, by using the following definition of the Jacobi polynomials [34]:

$$P_n^{(a,b)}(s) = \frac{(-1)^n}{n!2^n(1-s)^a(1+s)^b} \frac{d^n}{ds^n} \left[(1-s)^{a+n}(1+s)^{b+n} \right] \quad (3.34)$$

we can write

$$P_n^{(a,b)}(1-2s) = \frac{C_n}{s^a(1-s)^b} \frac{d^n}{ds^n} \left[s^{a+n}(1-s)^{b+n} \right] \quad (3.35)$$

and

$$\frac{d^n}{ds^n} \left[s^{a+n}(1-s)^{b+n} \right] = C_n s^a (1-s)^b P_n^{(a,b)}(1-2s). \quad (3.36)$$

If we use the last equality in Eq.(3.33), we can write

$$y_{n_r}(s) = C_{n_r} P_{n_r}^{(2\sqrt{c}, 2K-1)}(1-2s). \quad (3.37)$$

Substituting $\phi(s)$ and $y_{n_r}(s)$ into Eq.(3.10), we obtain

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^K P_{n_r}^{(2\sqrt{c}, 2K-1)}(1-2s). \quad (3.38)$$

Using the following definition of the Jacobi polynomials [34]:

$$P_n^{(a,b)}(s) = \frac{\Gamma(n+a+1)}{n!\Gamma(a+1)} \frac{F\left(-n, a+b+n+1, 1+a; \frac{1-s}{2}\right)}{2!} \quad (3.39)$$

we are able to write Eq.(3.38) in terms of hypergeometric polynomials as

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^K \frac{\Gamma(n_r+2\sqrt{c}+1)}{n_r!\Gamma(2\sqrt{c}+1)} \frac{F\left(-n_r, 2\sqrt{c}+2K+n_r, 1+2\sqrt{c}; s\right)}{2!} \quad (3.40)$$

The normalization constant C_{n_r} can be found from normalization condition

$$\int_0^\infty |\mathbf{R}(r)|^2 r^2 dr = \int_0^\infty |\chi(r)|^2 dr = \frac{1}{\delta} \int_0^1 |\chi(s)|^2 ds = 1, \quad (3.41)$$

by using the following integral formula [34]:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-s)^{2(\delta+1)} s^{2\lambda-1} \left\{ \frac{F(-n_r, (\delta+\lambda+1)+n_r, 2\lambda+1; s)}{2!} \right\}^2 dz = \\ & = \frac{(n_r+\delta+1)n_r!\Gamma(n_r+2\delta+2)\Gamma(2\lambda)\Gamma(2\lambda+1)}{(n_r+\delta+\lambda+1)\Gamma(n_r+2\lambda+1)\Gamma(2(\delta+\lambda+1)+n_r)}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

for $\delta > \frac{-3}{2}$ and $\lambda > 0$. After simple calculations, we obtain normalization constant as

$$C_{n_r} = \sqrt{\frac{n_r!2\sqrt{c}(n_r+K+\sqrt{c})\Gamma((2K+\sqrt{c})+n_r)}{b(n_r+K)\Gamma(n_r+2\sqrt{c}+1)\Gamma(n_r+2K)}}. \quad (3.43)$$

IV. Solution of Azimuthal Angle-Dependent Part of the Schrödinger Equation

We may also derive the eigenvalues and eigenvectors of the azimuthal angle dependent part of the Schrödinger equation in Eq.(2.4) by using NU method. The boundary condition for Eq. (2.4), $\Theta(\theta)$ require to be taken as a finite value. Introducing a new variable $x = \cos\theta$, Eq. (2.4) is brought to the form

Hence, we obtain

$$\Theta''(s) - \frac{2x}{1-x^2} \Theta'(x) + \frac{1}{(1-x^2)^2} [\lambda(1-s^2) - m^2 - (\beta' + \beta x)] \Theta(x) = 0. \quad (4.1)$$

After the comparison of Eq.(4.1) with Eq.(3.5) we have

$$\tilde{\tau}(x) = -2x, \sigma(x) = 1 - x^2, \tilde{\sigma}(x) = -\lambda x^2 - \beta x + (\lambda - m^2 - \beta'). \quad (4.2)$$

In the NU method the new function $\pi(x)$ is calculated for angle-dependent part as

$$\pi(x) = \pm \sqrt{x^2(\lambda - k) + \beta x - (\lambda - \beta' - m^2 - k)}. \quad (4.3)$$

The constant parameter k can be determined as

$$k_{1,2} = \frac{2\lambda - m^2 - \beta'}{2} \pm \frac{u}{2}, \quad (4.4)$$

where $u = \sqrt{(m^2 + \beta')^2 - \beta^2}$.

The appropriate function $\pi(x)$ and parameter k are

$$\pi(x) = - \left[x \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}} + \sqrt{\frac{m^2 + \beta' - u}{2}} \right], \quad (4.5)$$

$$k = \frac{2\lambda - m^2 - \beta'}{2} - \frac{u}{2}. \quad (4.6)$$

The following track in this selection is to achieve the condition $\tau' < 0$. Therefore $\tau(x)$ becomes

$$\tau(x) = -2x \left[1 + \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}} \right] - 2 \sqrt{\frac{m^2 + \beta' - u}{2}}. \quad (4.7)$$

We can also write the values $\bar{\lambda} = k + \pi'(s)$ as

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda - \beta' - m^2}{2} - \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}}, \quad (4.8)$$

also using Eq.(3.24) we can equate

$$\bar{\lambda}_N = \frac{2\lambda - \beta' - m^2}{2} - \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}} = 2N \left[1 + \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}} \right] + N(N-1). \quad (4.9)$$

In order to obtain unknown λ we can solve Eq.(4.9) explicitly for $\lambda = l(l+1)$

$$\lambda - \zeta^2 - \zeta = 2N(1 + \zeta) + N(N-1). \quad (4.10)$$

where $\zeta = \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}}$, and

$$\lambda = \zeta^2 + \zeta + 2N\zeta + N(N+1) = (N + \zeta)(N + \zeta + 1) = l(l+1). \quad (4.11)$$

then

$$l = N + \zeta. \quad (4.12)$$

Substitution of this result in Eq.(3.6,3.28) yields the desired energy spectrum, in terms of n_r and N quantum numbers. Similarly, the wave function of azimuthal angle dependent part of Schrödinger equation can be formally derived by a process to the derivation of radial part of Schrödinger equation.

$$\phi(x) = (1-x)^{(B+C)/2}, \quad (4.13)$$

$$\rho(x) = (1-x)^{(B+C)}(1+x)^{(B-C)}, \quad (4.14)$$

$$y_N(x) = C_N(1-x)^{-(B+C)}(1+x)^{C-B} \frac{d^N}{dx^N} [(1-x)^{B+C+N}(1+x)^{B-C+N}], \quad (4.15)$$

where

$$B = \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}}, \quad C = \sqrt{\frac{m^2 + \beta' - u}{2}}.$$

From the definition of Jacobi polynomials, we can write

$$\frac{d^N}{dx^N} [(1-x)^{B+C+N}(1+x)^{B-C+N}] = (-1)^N 2^N (1-x)^{B+C} (1+x)^{B-C} P_N^{(B+C, B-C)}(x). \quad (4.16)$$

Substitution of Eq.(4.16) into Eq.(4.15) and after long but straightforward calculations we obtain the following result

$$\Theta_N(x) = C_N(1-x)^{(B+C)/2}(1+x)^{(B-C)/2} P_N^{(B+C, B-C)}(x), \quad (4.17)$$

where C_N is the normalization constant. Using orthogonality relation of the Jacobi polynomials [35] the normalization constant can be found as

$$C_N = \sqrt{\frac{(2N+2B+1)\Gamma(N+1)\Gamma(N+2B+1)}{2^{2B+1}\Gamma(N+B+C+1)\Gamma(N+B-C+1)}}. \quad (4.18)$$

V. Numerical Results and Discussion

Solution of the Schrödinger equation for the Hulthén potential plus a ring-shaped like potential are obtained by applying the Nikiforov-Uvarov method in which we used the improved approximation scheme to the centrifugal potential for arbitrary l states. The energy eigenvalues and corresponding eigenfunctions are obtained for arbitrary l quantum numbers. Two important cases must be emphasized in the results of this study. In the first case which $\beta = \beta' = 0$ the potentials turn to central Hulthén potential. For this case, by using $u = m^2, \zeta = |m|$ and $l = N + |m|$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) then $l \geq |m|$ by substituting this values in Eq.(3.28) we obtain energy spectrum for Hulthén potential. The second case is the general situation where $\beta \neq 0$ or $\beta' \neq 0$. By changing β and β' we obtain energy values of Hulthén plus different type ring shaped like potentials. It is shown that the our approximation Eq.(3.2) is a good approximation to the centrifugal term for short potential range, i.e. small δ .

Finally, we want to deal with some restrictions about bound state solutions of Schrödinger equation for Hulthén plus ring-shaped like potential. First, it is seen from Eq.(4.4) and expression from u that in order to obtain real energy values the condition $(m^2 + \beta')^2 \geq \beta^2$ must be hold. Since the parameters β and β' are real and positive, we can write

$$m^2 \geq (\beta - \beta'). \quad (5.1)$$

If $\beta \leq \beta'$ the inequality in Eq.(5.1) is provided automatically. But if $\beta \geq \beta'$ then m becomes bounded.

If condition in Eq.(5.1) are satisfied simultaneously, the bound states exist. Thus the energy spectrum equation in Eq.(3.28) as limited, i.e, we have only the finite numbers of energy eigenvalues.

VI. Conclusion

It is well known that the Hulthén potential is one of the important exponential potentials, and it has been a subject of interest in many fields of physics and chemistry. The main results of this paper are the explicit and closed form expressions for the energy eigenvalues and the normalized wave functions. The method presented in this paper is a systematic one and in many cases it is more than the other ones.

Analytical calculations of energy eigenvalues for an arbitrary l state and corresponding eigenfunctions in the Hulthén plus a Ring-Shaped like potential is done by using Nikiforov-Uvarov method in this paper. The energy eigenvalue expression for Hulthén potential plus a ring-shaped like potential is given by Eq.(3.28). We also obtain some important restrictions on quantum numbers about bound state solutions of Schrödinger equation. We can conclude that our results are not only interesting for pure theoretical physicist but also for experimental physicist, because the results are exact and more general.

REFERENCES

1. W. Greiner, Quantum Mechanics, 4th. edn. (Springer, Berlin, 2001).
2. V. G. Bagrov, D. M. Gitman, Exact Solutions of Relativistic Wave Equations (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990).
3. C. ECKART, *THE PENETRATION OF A POTENTIAL BARRIER BY ELECTRONS*, *PHYSICAL REVIEW* **35**, P.1303-1309, 1930.
4. L. Hulthén, Über die eigenlösungen der Schrodinger-gleichung der deuterons, *Ark. Mat. Astron. Fys.* **A28**, 5, 1942.
5. L. Hulthen, On the virtual state of the deuteron. *Ark. Mat. Astron. Fys.* **B29**, 1, 1942.
6. S. Fliigge, Practical Quantum Mechanics, Vol. 1, Springer, Berlin, 1994.
7. C. S. Lam, Y.P. Varshni, Energies of s eigenstates in a static screened Coulomb potential, *Physical Review* **A4**, 1875-1881, 1971.
8. Y. P. Varshni, Eigenenergies and oscillator strengths for the Hulthén potential, *Physical Review* **A41**, 4682-4689, 1990.
9. C. S. Lai, W.C. Lin, Energies of the Hulthén potential for $l \neq 0$, *Physics Letters* **A78**, 335-337, 1980.
10. R. Dutt, U. Mukherji, A new analytic approximation method for the non-zero angular momentum states of the Hulthén potential, *Phys. Lett. A* **90**, 395-398, 1982.
11. S. H. Patil, Energy levels of screened Coulomb and Hulthen potentials, *Journal of Physics* **A17**, 575-583, 1984.
12. V. S. Popov, V. M. Weinberg, On summation of perturbation series for screened coulomb potentials, *Physics Letters* **A107**, 371-375, 1985.
13. B. Roy, R. Roychoudhury, The shifted $1/N$ expansion and the energy eigenvalues of the Hulthen potential for $l \neq 0$, *Journal of Physics* **A20**, 3051-3057, 1987.
14. A. Z. Tang, F. T. Chan, Shifted $1/N$ expansion for the Hulthén potential, *Physical Review* **A35**, 911-914, 1987.
15. C. H. Lai, Perturbative results from the $1/N$ expansion for screened Coulomb potentials, *Journal of Mathematical Physics* **28**, 1801-1808, 1987.
16. P. Matthys, H. De Meyer, Dynamical-group approach to the Hulthén potential, *Physical Review* **A38**, 1168-1172, 1988.
17. U. Laha, C. Bhattacharyya, K. Roy, B. Talukdar, Hamiltonian hierarchy and the Hulthén potential, *Physical Review* **C38**, 558-560, 1988.
18. B. Talukdar, U. Das, C. Bhattacharyya, P. K. Bera, Phase-equivalent potentials from supersymmetric quantum mechanics, *Journal Physics A* **25**, 4073-4082, 1992.
19. E. D. Filho, R. M. Ricotta, Supersymmetry, Variational Method and Hulthén Potential, *Modern Physics Letters*, **A10**, 1613-1618, 1995.
20. A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhauser, Basel 1988.

21. V. H. Badalov, H. I. Ahmadov, and A. I. Ahmadov, Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Woods-Saxon potential for arbitrary l – state, *International Journal of Modern Physics E* 18, No.3, pp.631-641, 2009.
22. V. H. Badalov, H. I. Ahmadov, and S. V. Badalov, Any l -state analytical solutions of the Klein–Gordon equation for the Woods–Saxon potential. *International Journal of Modern Physics E* 19, 1463, 2010.
23. V. H. Badalov, H. I. Ahmadov, Analytical solutions of the D -dimensional Schrödinger equation with the Woods-Saxon potential for arbitrary l state. [math-ph/1111.4734](https://arxiv.org/abs/math-ph/1111.4734).
24. H. I. Ahmadov, C. Aydin, N. Sh. Huseynova, and O. Uzun, Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Manning–Rosen potential plus a ring-shaped-like potential. *International Journal of Modern Physics E* 22, No. 10, 1350072, 2013.
25. A. I. Ahmadov, C. Aydin and O. Uzun, Analytical solutions of the Klein-Fock- Gordon equation with the Manning-Rosen potential plus a Ring - Shaped like potential. *International Journal of Modern Physics A* 29, 1450002, 2014.
26. A. I. Ahmadov, Maria Naeem, M. V. Qocayeva and A. A. Tarverdiyeva, Bound State Solutions of the Schrödinger Equation for the Manning-Rosen plus Hulthén Potential Within SUSY Quantum Mechanics, *International Journal of Modern Physics A* 33, 1850021, 2018.
27. Wen-Chao Qiang, Shi-Hai Dong, The Manning–Rosen potential studied by a new approximate scheme to the centrifugal term. *Physics Scripta* 79, 045004, 2009. (5pp)
28. Wen-Chao Qiang, Shi-Hai Dong, Arbitrary l -state solutions of the rotating Morse potential through the exact quantization rule method. *Physics Letters A* 363, 169-176, 2007).
29. Gao-Feng Wei, Shi-Hai Dong, Approximately analytical solutions of the Manning–Rosen potential with the spin–orbit coupling term and spin symmetry. *Physics Letters A* 373, 49-53, 2008.
30. C. S. Jia, T. Chen and L. G. Cui, Approximate analytical solutions of the Dirac equation with the generalized Pöschl–Teller potential including the pseudo-centrifugal term. *Physics Letters A* 373, 1621-1626 (2009).
31. R. L. Greene and C. Aldrich, Variational wave functions for a screened Coulomb potential, *Physical Review A*, Vol. 14, No. 6, p. 2363-2366, 1976.
32. I. Area, E. Godoy, A. Ronveaux, A. Zarzo, Hypergeometric-type differential equations: second kind solutions and related integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 157, 93-106, 2003.
33. S. M. Ikhdair and R. Sever, Approximate Eigenvalue and Eigenfunction Solutions for the Generalized Hulthén Potential with any Angular Momentum. *Journal of Mathematical Chemistry* 42, 461–471, 2007.
34. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables* Dover, New York, 1964.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Journal-Physics" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (**journal@beu.edu.az**) of the Journal. The submitted article should follow the following format:
 - Article title, author's name and surname
 - The name of workplace
 - Mail address
 - Abstract and key words
4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. **UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:
 - Introduction
 - Research method and research
 - Discussion of research method and its results
 - In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.
8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

 - a) **Article:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjajev N.M.. *Spatial and electronic structure of monomerrik and dimeric conapeetes of carnosine üith zinc*, Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
 - b) **Book:** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002
 - c) **Conference paper:** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information – Commu-nication Technologies in Science and education. II International Conference."Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", *Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*
References should be in 9-point type size.
10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:
 - The article is sent to at least to experts.
 - The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
 - After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University" Fizika- əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
 2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
 3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:
 - Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
 - İş yeri,
 - Elektron ünvanı,
 - Xülasə və açar sözlər.
 4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
 5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
 6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərməlidir.
 7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:
 - Giriş,
 - Tədqiqat metodu
 - Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
 - İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orijinal dili mötəzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.
 8. **Şəkil, rəsm, grafik** və **cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və grafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlün üstündə yazılmalıdır.
 9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzəlməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha çox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisnin adı göstərməlidir.
- Nümunələr:**
- a) **Məqalə:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
 - b) **Kitab:** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002
 - c) **Konfrans:** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391
- Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.
10. **Səhifə ölçüləri:** üstədən 2.8 sm, altdan 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
 11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
 12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:
 - Hər məqalə ən azı iki ekspertə göndərilir.
 - Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
 - Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. "Journal of Baku Engineering University-Physics" önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanında yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:
 - Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
 - İş yeri,
 - E-posta adresi,
 - Özet ve anahtar kelimeler.
4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özeti sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:
 - Giriş,
 - Araştırma yöntemi
 - Araştırma
 - Tartışma ve sonuçlar,
 - İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orijinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.
7. **Şekil, Resim, Grafik ve Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısmında yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,sch.15]. Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmi makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmî makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

- a) **Makale:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjajev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomeric and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Kıtap:** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002
- c) **Kongre:** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions*", Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri**; üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderilebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:
 - Her makale en az iki uzmana gönderilir.
 - Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
 - Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.
13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gönderilmesi zamani posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No'lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslenmelidir.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Физика публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.
2. Статьи принимаются на английском языке.
3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес (**journal@beu.edu.az**). Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:
 - Название статьи, имя и фамилия авторов
 - Место работы
 - Электронный адрес
 - Аннотация и ключевые слова
4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.
5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.
6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.
7. Представленные статьи должны содержать:
 - Введение
 - Метод исследования
 - Обсуждение результатов исследования и выводов.
 - Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.
8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.
9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

Например:

- a) **Статья:** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjajev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Книга:** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002
- c) **Конференция:** Sadychov F.S, Fydin C, Ahmedov A.I. Application of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision*", Baki,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.
12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:
 - Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
 - Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
 - Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.